

# Über die Darstellung von Ringen als Restklassenringe

Vorgelegt von  
Walter Höger  
aus Höflein a. d. Thaya/CSR

1960



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41548805\\_0101](https://archive.org/details/IA41548805_0101)

Über die Darstellung von Ringen als  
Restklassenringe

Inauguraldissertation  
der Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen  
zur  
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von  
Walter Höger  
aus Höflein a. d. Thaya/CSR

Als Dissertation genehmigt  
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Erlangen



Tag der mündlichen Prüfung: 23. 11. 1960.

Dekan : Universitätsprofessor Dr. G. Hesse

Berichterstatter: " Dr. W. Specht

Berichterstatter: " Dr. H.-J. Kowalsky

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. W. Specht danke  
ich herzlich für die Anregungen zu dieser Arbeit, für die  
Unterstützung und die Ratschläge, die er mit zuteil werden  
ließ.



Meinen Eltern gewidmet

## Inhaltsverzeichnis.

|                                                                                           |       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------|----|
| Einleitung                                                                                | Seite | 1  |
| Erläuterung der Bezeichnungen                                                             |       | 3  |
| § 1 Darstellung durch freie Ringe                                                         |       | 4  |
| § 2 Darstellungen eines Ringes                                                            |       | 6  |
| 2.1 Induzierte Homomorphismen                                                             |       | 6  |
| 2.2 Definitionen                                                                          |       | 8  |
| 2.3 Darstellungsklassen                                                                   |       | 8  |
| 2.4 Ähnliche und verwandte Ringe                                                          |       | 14 |
| § 3 Kommutatorideale und Hauptsatz                                                        |       | 15 |
| 3.1 Kommutatorideale                                                                      |       | 15 |
| 3.2 Hauptsatz                                                                             |       | 16 |
| § 4 Kommutatorformeln                                                                     |       | 18 |
| 4.1 Formeln für Ringelemente                                                              |       | 18 |
| 4.2 Formeln für Ideale                                                                    |       | 19 |
| 4.3 Reine Kommutatoren                                                                    |       | 20 |
| 4.4 Halbreine Kommutatoren                                                                |       | 23 |
| § 5 Beweis des Hauptsatzes                                                                |       | 25 |
| § 6 Hilfssätze                                                                            |       | 28 |
| § 7 Kriterien für die Verwandtschaft oder die<br>wesentliche Gleichheit von Darstellungen |       | 32 |
| § 8 Die Potenz eines Ringes                                                               |       | 41 |
| § 9 Beziehungen zwischen Invarianten                                                      |       | 45 |
| § 10 Beispiele                                                                            |       | 56 |
| 10.1 Viererring                                                                           |       | 56 |
| 10.2 Sechzehnering                                                                        |       | 56 |
| 10.3 Quaternionenring                                                                     |       | 57 |
| 10.4 Ring der $p$ -Polynome nach ORE                                                      |       | 58 |
| Literaturverzeichnis                                                                      |       | 61 |
| Lebenslauf                                                                                |       | 62 |

## Einleitung.

Im Jahre 1945 erschien eine Arbeit von R.BAER über "Representations of groups as quotient groups". Ein Kernstück dieser Arbeit ist eine Untersuchung über die Einteilung der zu einer Gruppe  $G$  isomorphen Darstellungen  $H/N \cong G$  in Äquivalenzklassen „verwandter“ Darstellungen. Zwei Darstellungen  $F/M$  und  $V/N$  heißen verwandt, wenn es einen Homomorphismus  $\varphi$  von  $F$  in  $V$  und einen Homomorphismus  $\psi$  von  $V$  in  $F$  gibt derart, daß  $\varphi$  und  $\psi$  reziproke Isomorphismen zwischen  $F/M$  und  $V/N$  induzieren. Bezüglich dieser Klassen wird unter Benutzung des Kommutatorkalküls ein umfangreiches System von Invarianten konstruiert.

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis eines Versuchs die Methoden von R.BAER auf nichtkommutative, assoziative Ringe anzuwenden.

Dieser Versuch hatte keinen vollen Erfolg. Die Übertragung gelang zwar für einen gewissen Teil des Invariantensystems - insbesondere konnte ein Satz von H.HOPF in verallgemeinerter Form übersetzt werden -, aber für den weit größeren Teil des Systems konnte nicht entschieden werden, ob eine Übertragung möglich ist oder nicht.

Die Schwierigkeiten dabei hängen damit zusammen, daß es kein sicheres Verfahren gibt, von einem Element eines (freien) Ringes festzustellen, ob es in einem vorgegebenen Kommutatorideal liegt oder nicht.

In den beiden ersten Paragraphen werden die zu einem Ring isomorphen Darstellungen  $F/M$  untersucht. Sie werden durch den Begriff der Verwandtschaft zweier Darstellungen - ein Analogon zum entsprechenden Begriff der Gruppentheorie - in Äquivalenzklassen eingeteilt. Es werden die Begriffe der Ähnlichkeit und des Getreuseins

von Darstellungen untersucht. Eine Darstellung  $\gamma/\mu$  eines Ringes  $\mathcal{Q}$  heißt getreu, wenn jeder Automorphismus von  $\mathcal{Q}$  durch einen Endomorphismus von  $\gamma$  induziert wird; zwei Darstellungen heißen ähnlich, wenn sie verwandt und beide getreu sind.

Es stellt sich heraus, daß, wenn ein Ring frei ist, seine sämtlichen Darstellungen ähnlich sind, und daß zwei Darstellungen eines Ringes durch freie Ringe ähnlich sind. Daraus folgt die Existenz des Invariantensystems für alle Darstellungen eines Ringes durch freie Ringe (Satz von H. HOFF).

Anschließend folgen nach dem einleitenden § 6, der Hilfssätze enthält, in § 7 einige Kriterien für die Verwandtschaft oder die wesentliche Gleichheit zweier Darstellungen eines Ringes, wobei insbesondere solche interessiert, in denen von der Existenz gewisser Invarianten ausgegangen wird.

In § 8 wird die Potenz  $P(\mathcal{Q})$  eines Ringes eingeführt, die für das Weitere gebraucht wird.  $P(\mathcal{Q})$  ist das Ideal, das von denjenigen Idealen von  $\mathcal{Q}$  erzeugt wird, die gleich ihrem eigenen Kommutatorideal sind. In § 9 werden Beziehungen zwischen den Klasseninvarianten der Definition 3.4 untersucht. § 10 enthält vier Beispiele nichtkommutativer Ringe.

Für die Anregungen zu dieser Arbeit bin ich Prof. Dr. W. SPECHT zu großem Dank verpflichtet.

Fürth (Bay), 1.10.1960.

Walter Hger

## Erläuterung der Bezeichnungen.

1.  $\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathcal{T}, \mathcal{W}$  usw. sind Bezeichnungen für Ringe und Unter-  
ringe,  $\mathcal{a}, \mathcal{b}, \mathcal{m}, \mathcal{n}$  usw. für Ideale;  ${}_i\mathcal{R}, \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{m}, \mathcal{n}), \mathcal{F}(\mathcal{R})$  sind  
jedoch ebenfalls Ideale.
2.  $f_i, r_j, s', t$  sind Elemente aus  $\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathcal{T}$ ;  
 ${}_i\mathcal{m}, n_j, a', {}_i\mathcal{r}$  sind Elemente der Ideale  ${}_i\mathcal{m}, \mathcal{n}, \mathcal{a}, {}_i\mathcal{R}$ .
3.  $\alpha_3, \beta_{12}^{-1}$  bezeichnen Homomorphismen.  $\alpha\beta$  heißt, daß zuerst  $\alpha$ ,  
dann  $\beta$  anzuwenden ist.
4. Sätze, Formeln, Definitionen, Beispiele und Bemerkungen werden  
in den einzelnen Paragraphen durchnummeriert. Satz 4.7 etwa ist  
der siebente Satz aus § 4. Die Einteilung einiger Paragraphen,  
z.B. von § 4 in 4.1, 4.2, 4.3 und 4.4 berührt diese Zählung  
nicht.
5. Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturver-  
zeichnis am Ende der Arbeit. Die dieser Schrift zugrundeliegen-  
de Arbeit [I] von R. BAER wird nicht immer ausdrücklich erwähnt.

## § 1. Darstellung durch freie Ringe.

$\mathcal{R}$  sei ein (nicht notwendig kommutativer) assoziativer Ring. Ein zu  $\mathcal{R}$  isomorpher Restklassenring  $\mathcal{R}/\mathcal{I} \cong \mathcal{R}$  eines assoziativen Ringes  $\mathcal{I}$  nach einem zweiseitigen Ideal  $\mathcal{I}$  heißt eine Darstellung von  $\mathcal{R}$ . Aus Satz 1.1 schließt man, daß jeder Ring  $\mathcal{R}$  nichttriviale, d.h. von  $\mathcal{R}/(0)$  verschiedene Darstellungen hat.

$\mathcal{R}$  werde von den Elementen  $\{y_\lambda\}$  ( $\lambda \in K$ ,  $K$  eine Indexmenge) erzeugt. Dabei sei die Darstellung jedes Elements  $r$

$$r = N_1 \prod_{\lambda_1 \in K} y_{\lambda_1} + \dots + N_m \prod_{\lambda_m \in K} y_{\lambda_m}$$

so gewählt, daß je zwei Produkte formal verschieden, d.h. nicht Faktor für Faktor gleich sind.  $N_1, \dots, N_m$  seien ganze, von Null verschiedene Zahlen,  $m = 1, 2, 3, \dots$  oder  $m = 0$ . Jeder Ring kann so erzeugt werden; man nehme etwa für  $\{y_\lambda\}$  die Menge aller Ringelemente.

Ist  $\mathcal{R}$  kommutativ, so besteht die Möglichkeit, es außerdem auf Permutationen der Faktoren eines Produkts nicht ankommen zu lassen.

$\mathcal{F}$  sei der freie Ring, der von den Elementen  $\{x_\lambda\}$  ( $\lambda \in K$ ) erzeugt wird.

Seine Elemente  $f$  seien die Gebilde der Art

$$f = N_1 \prod_{\lambda_1 \in K} x_{\lambda_1} + \dots + N_m \prod_{\lambda_m \in K} x_{\lambda_m}$$

wobei wiederum die Produkte paarweise voneinander verschieden und  $N_1, \dots, N_m$  ganze, nicht verschwindende Zahlen sein sollen;  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Auf die Reihenfolge der Summanden soll es nicht ankommen. Lassen sich zwei solche Gebilde durch Vertauschen der Summanden nicht ineinander überführen, so sollen sie verschiedene Elemente sein.

Die Summe zweier solcher Gebilde sei wie üblich definiert, ebenso das (nichtkommutative) Produkt. Entstehen bei einer dieser Operationen formal gleiche Produkte, so werden sie zusammengefaßt. Produkte der Form  $0 \prod_{\lambda \in K} x_\lambda$  werden nicht geschrieben. Be-

kanntlich ist  $\mathbb{F}$  ein nichtkommutativer Ring; [II, § 49]. Er heiße ein zu  $\mathcal{Q}$  gehöriger freier Ring.

Läßt man in jedem Produkt der Gebilde

$$f = N_{\prod_{v_1=1}^{x_1, n_1}} x_{v_1} + \dots + N_{\prod_{v_m=1}^{x_m, n_m}} x_{v_m}$$

alle Permutationen der Faktoren zu, so erhält man den von  $\{x_\alpha\}$  erzeugten freien abelschen Ring.

Man findet folgende Sätze:

Satz 1.1: Jeder Ring  $\mathcal{Q}$  kann als Restklassenring eines freien Ringes  $\mathbb{F}$  dargestellt werden. [II, Satz 100.]

Satz 1.2: Jeder kommutative Ring  $\mathcal{Q}$  kann als Restklassenring eines freien abelschen Ringes  $\mathbb{F}$  dargestellt werden.

Zum Beweis: Jeder (kommutative) Ring  $\mathcal{Q}$  ist hinsichtlich der Zuordnung  $f \mapsto r$

ein homomorphes Bild eines zugehörigen freien (abelschen) Ringes  $\mathbb{F}$ ;  $\mathcal{A}$  sei das Ideal der Elemente  $f$ , die dabei auf die Null abgebildet werden. Dann gilt  $\mathcal{Q} \cong \mathbb{F}/\mathcal{A}$ .

## § 2. Darstellungen eines Ringes.

### 2.1. Induzierte Homomorphismen.

Sind  $\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{n}$  Ideale der Ringe  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$ , und ist  $\gamma$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{B}$ , sowie  $\bar{x}$  eine Restklasse von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$ , so ist  $\bar{x}^\gamma$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{B}$ .  $\bar{x}^\gamma$  ist eine Teilmenge einer Restklasse von  $\mathfrak{B}/\mathfrak{n}$  genau dann, wenn  $\mathfrak{m}^\gamma \subseteq \mathfrak{n}$ . Die  $\bar{x}^\gamma$  enthaltende Restklasse besteht dann aus allen Summen  $n + x^\gamma$ , weshalb sie ohne Verwechslungsgefahr durch  $\mathfrak{n} + \bar{x}^\gamma$  bezeichnet werden kann.

Def. 2.1: Ist  $\mathfrak{m}^\gamma \subseteq \mathfrak{n}$ , so wird ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  in  $\mathfrak{B}/\mathfrak{n}$  definiert, wenn man jede Restklasse  $\bar{x}$  von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  abbildet auf die Restklasse  $\mathfrak{n} + \bar{x}^\gamma$  von  $\mathfrak{B}/\mathfrak{n}$ . Dieser Homomorphismus soll durch  $\gamma$  induziert heißen; wenn über einen von  $\gamma$  induzierten Homomorphismus gesprochen wird, soll immer  $\mathfrak{m}^\gamma \subseteq \mathfrak{n}$  vorausgesetzt sein.

Lemma 2.1: Werden die Homomorphismen  $\alpha_{12}$  von  $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{m}_1$  in  $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{m}_2$  und  $\alpha_{23}$  von  $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{m}_2$  in  $\mathfrak{A}_3/\mathfrak{m}_3$  von den Homomorphismen  $\beta_{12}$  von  $\mathfrak{A}_1$  in  $\mathfrak{A}_2$  bzw.  $\beta_{23}$  von  $\mathfrak{A}_2$  in  $\mathfrak{A}_3$  induziert, so induziert der Homomorphismus  $\beta_{12}\beta_{23}$  von  $\mathfrak{A}_1$  in  $\mathfrak{A}_3$  den Homomorphismus  $\alpha_{12}\alpha_{23}$  von  $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{m}_1$  in  $\mathfrak{A}_3/\mathfrak{m}_3$ .

Beweis:  $\mathfrak{m}_1 \beta_{12}\beta_{23} \subseteq \mathfrak{m}_2 \beta_{23} \subseteq \mathfrak{m}_3$ .

Ist  $s_1 \in \mathfrak{m}_1 + s_1$ , so liegt  $s_1 \beta_{12}\beta_{23}$  gerade in  $(\mathfrak{m}_1 + s_1)^{\alpha_{12}\alpha_{23}}$ , denn auf Grund der Voraussetzungen schließt man  $(\mathfrak{m}_1 + s_1)^{\beta_{12}\beta_{23}} \subseteq ((\mathfrak{m}_1 + s_1)^{\alpha_{12}})^{\beta_{23}} \subseteq (\mathfrak{m}_1 + s_1)^{\alpha_{12}\alpha_{23}}$ .

Daraus folgt sofort

Lemma 2.2: Werden die Isomorphismen  $\beta_{12}''$  von  $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{m}_1$  auf  $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{m}_2$  und  $\beta_{23}''$  von  $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{m}_2$  auf  $\mathfrak{A}_3/\mathfrak{m}_3$  von den Homomorphismen  $\beta_{12}$  von  $\mathfrak{A}_1$  in  $\mathfrak{A}_2$  bzw.  $\beta_{23}$  von  $\mathfrak{A}_2$  in  $\mathfrak{A}_3$  induziert, so induziert der Homomorphismus  $\beta_{12}\beta_{23}$  von  $\mathfrak{A}_1$  in  $\mathfrak{A}_3$  den Isomorphismus  $\beta_{12}''\beta_{23}''$  von  $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{m}_1$  auf  $\mathfrak{A}_3/\mathfrak{m}_3$ .

Lemma 2.3: Induziert der Homomorphismus  $\gamma_1$  von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathfrak{d}$  den Homomorphismus  $\gamma_2$  von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathfrak{d}/\mathfrak{w}$  und induziert  $\gamma_2$  den Homomorphismus  $\gamma_3$  von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{w}$  in  $\mathfrak{d}/\mathfrak{w}$ ,  
so wird  $\gamma_3$  von  $\gamma_1$  induziert.

Beweis: Wegen  $\mathfrak{w}^{q_1} \subseteq \mathfrak{w}^{q_2} + \mathfrak{w} \subseteq \mathfrak{w}$  induziert  $\gamma_1$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{w}$  in  $\mathfrak{d}/\mathfrak{w}$ ;  $\gamma_1$  induziert  $\gamma_3$ , denn  

$$(\mathfrak{w} + \mathfrak{r})^{q_1} \subseteq (\mathfrak{w} + \mathfrak{r})^{q_2} + \mathfrak{w} \subseteq (\mathfrak{w} + \mathfrak{r})^{q_3} + \mathfrak{w} = \mathfrak{w}^{q_3} + \mathfrak{r}^{q_3} + \mathfrak{w} = \\ \subseteq \mathfrak{w} + \mathfrak{r}^{q_3} + \mathfrak{w} = \mathfrak{w} + \mathfrak{r}^{q_3} = (\mathfrak{w} + \mathfrak{r})^{q_3}.$$

Lemma 2.4:  $\gamma$  sei ein Homomorphismus von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathfrak{d}$ , der  
 (1) einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{w}$  in (auf)  $\mathfrak{d}/\mathfrak{w}$  und  
 (2) einen Homomorphismus von  $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$  in (auf)  $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$  induziert.  
 Dann induziert  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{z}$  in (auf)  $\mathfrak{d}/\mathfrak{z}$ .

Beweis: (a) Wegen  $\mathfrak{z}^{\gamma_1} \subseteq \mathfrak{z}$  nach (2) induziert  $\gamma$  einen Homomorphismus „in“.

(b) Nach (1) gibt es zu jedem  $\mathfrak{s}$  ein  $\mathfrak{r}$  mit  $\mathfrak{r}^{\gamma_1} \in \mathfrak{w} + \mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{r}^{\gamma_1} = \mathfrak{n} + \mathfrak{s}$ .

Nach (2) existiert ein  $\mathfrak{m}$  mit  $\mathfrak{m}^{\gamma_1} \in \mathfrak{z} - \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{m}^{\gamma_1} = \mathfrak{z} - \mathfrak{n}$ .

$(\mathfrak{m} + \mathfrak{r})^{\gamma_1} = \mathfrak{z} - \mathfrak{n} + \mathfrak{n} + \mathfrak{s} = \mathfrak{z} + \mathfrak{s}$

D.h.  $\gamma$  induziert einen Homomorphismus „auf“.

Lemma 2.5:  $\gamma$  sei ein Homomorphismus von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathfrak{d}$ , der  
 (1) einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{w}$  in (auf)  $\mathfrak{d}/\mathfrak{w}$  und  
 (2) einen Isomorphismus von  $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$  in (auf)  $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$  induziert.  
 Dann induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{z}$  in (auf)  $\mathfrak{d}/\mathfrak{z}$ .

Beweis: Nach Lemma 2.4 induziert  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{z}$  in (auf)  $\mathfrak{d}/\mathfrak{z}$ . Ist  $\mathfrak{r}^{\gamma_1} \in \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{w}$ , so ist  $\mathfrak{r} \in \mathfrak{w}$  nach (1) und damit  $\mathfrak{r} \in \mathfrak{z}$  nach (2). Also induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus.

Lemma 2.6: Der Homomorphismus  $\gamma$  von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathfrak{d}$  sei ein Isomorphismus von  $\mathfrak{w}$  in (auf)  $\mathfrak{w}$  und induziere einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathfrak{w}$  in (auf)  $\mathfrak{d}/\mathfrak{w}$ .

Dann ist  $\gamma$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  in (auf)  $\mathfrak{d}$ .

Beweis: Setzt man  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{o})$  und  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{o})$ , so ergibt sich die Behauptung aus Lemma 2.5.

## 2.2. Definitionen.

Def.2.2: Zwei Darstellungen  $\delta_{1/\mathcal{M}_1}, \delta_{2/\mathcal{M}_2}$  eines Ringes  $\mathcal{Q}$  heißen wesentlich gleich, wenn ein Isomorphismus  $\alpha$  existiert mit  $\delta_1^\alpha = \delta_2$  und  $\mathcal{M}_1^\alpha = \mathcal{M}_2$ .

Def.2.3: Zwei Darstellungen  $\delta_{1/\mathcal{M}_1}, \delta_{2/\mathcal{M}_2}$  eines Ringes  $\mathcal{Q}$  heißen verwandt, wenn Homomorphismen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  mit  $\delta_1^{\eta_1} = \delta_2, \mathcal{M}_1^{\eta_1} \subseteq \mathcal{M}_2, \delta_2^{\eta_2} \subseteq \delta_1, \mathcal{M}_2^{\eta_2} \subseteq \mathcal{M}_1$  existieren, die reziproke Isomorphismen  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  induzieren.

$$(\delta_{1/\mathcal{M}_1})^\alpha = \delta_{2/\mathcal{M}_2}, (\delta_{2/\mathcal{M}_2})^{\alpha^{-1}} = \delta_{1/\mathcal{M}_1}.$$

$\eta_1, \eta_2$  heißen verbindende Homomorphismen.

Def.2.4: Zwei Darstellungen  $\delta_{1/\mathcal{M}_1}, \delta_{2/\mathcal{M}_2}$  eines Ringes  $\mathcal{Q}$  heißen ähnlich, wenn jedes Paar reziproker Isomorphismen  $\alpha, \alpha^{-1}$  zwischen  $\delta_{1/\mathcal{M}_1}$  und  $\delta_{2/\mathcal{M}_2}$  durch ein Paar verbindender Homomorphismen  $\eta_1, \eta_2$  der Ringe  $\delta_1, \delta_2$  induziert wird.

Def.2.5: Eine Darstellung  $\delta/\mathcal{M}$  eines Ringes  $\mathcal{Q}$  heißt selbstähnlich oder getreu, wenn jeder Automorphismus von  $\mathcal{Q}$  durch einen Endomorphismus von  $\delta$  induziert wird.

## 2.3. Darstellungsklassen.

Satz 2.1: Durch den Begriff der Verwandtschaft lassen sich die Darstellungen eines Ringes  $\mathcal{Q}$  in Äquivalenzklassen einteilen.

Beweis: (1) Reflexivität: Die Identität von  $\delta$  auf  $\delta$  induziert die Identität von  $\delta/\mathcal{M}$  auf  $\delta/\mathcal{M}$ .

(2) Symmetrie: In Definition 2.3 kommt es auf eine Vertauschung der beiden Indizes nicht an.

(3) Transitivität: Es sei  $\delta_{1/\mathcal{M}_1}$  verwandt mit  $\delta_{2/\mathcal{M}_2}$  und  $\delta_{2/\mathcal{M}_2}$  verwandt mit  $\delta_{3/\mathcal{M}_3}$ . Die reziproken Isomorphismen  $\alpha, \alpha^{-1}$  und  $\beta, \beta^{-1}$  werden von den verbindenden Homomorphismen  $\eta_1, \eta_2$  bzw.  $\zeta_2, \zeta_3$  induziert.

Nach Lemma 2.2 induzieren die Homomorphismen  $\eta_1 \zeta_2$  und  $\zeta_3 \eta_2$  die reziproken Isomorphismen  $\alpha \beta$  bzw.  $\beta^{-1} \alpha^{-1}$ .

Satz 2.2: Die Ähnlichkeit ist symmetrisch und transitiv.

Beweis: (1) Symmetrie: In der Definition 2.4 kommt es auf eine Vertauschung der beiden Indizes nicht an.

(2) Transitivität: Es sei  $\delta_1/\mu_1$  ähnlich  $\delta_2/\mu_2$  und  $\delta_2/\mu_2$  ähnlich  $\delta_3/\mu_3$ . Für jeden Isomorphismus  $\beta_{13}''$  von  $\delta_1/\mu_1$  auf  $\delta_3/\mu_3$  gilt  $\beta_{13}'' = \alpha(\alpha^{-1}\beta_{13}'')$ , wobei  $\alpha$  irgendein Isomorphismus von  $\delta_1/\mu_1$  auf  $\delta_2/\mu_2$  ist. Nach Voraussetzung existieren Homomorphismen, die  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}\beta_{13}''$  induzieren; deren Produkt induziert  $\beta_{13}''$  nach Lemma 2.2.

Beispiel 2.1 wird zeigen, daß die Ähnlichkeit nicht reflexiv ist.

Satz 2.3: Zwei Darstellungen eines Ringes sind genau dann ähnlich, wenn sie verwandt und beide getreu sind.

Beweis: (1) Es ist zu zeigen, daß jeder Isomorphismus  $\alpha''$  von  $\delta_1/\mu_1$  auf  $\delta_2/\mu_2$  durch einen Homomorphismus  $\alpha$  von  $\delta_1$  in  $\delta_2$  induziert wird. Wegen der Verwandtschaft der beiden Darstellungen gibt es Homomorphismen  $\eta$  und  $\alpha$  von  $\delta_1$  in  $\delta_2$  bzw.  $\delta_2$  in  $\delta_1$ , die reziproke Isomorphismen  $\alpha''^{-1}$  und  $\alpha''$  induzieren. Da  $\delta_1/\mu_1$  getreu ist, wird der Automorphismus  $\beta'' = \alpha''\alpha''^{-1}$  von einem Endomorphismus  $\beta$  von  $\delta_1$  induziert. Nach Lemma 2.2 induziert der Homomorphismus  $\alpha = \beta\eta$  von  $\delta_1$  in  $\delta_2$  den Isomorphismus  $\beta''\alpha''^{-1} = \alpha''\alpha''\alpha''^{-1} = \alpha''$  von  $\delta_1/\mu_1$  auf  $\delta_2/\mu_2$ .

(2a)  $\delta_1/\mu_1$  ist ähnlich  $\delta_2/\mu_2$  nach Voraussetzung,  $\delta_2/\mu_2$  ist ähnlich  $\delta_1/\mu_1$  wegen der Symmetrie der Ähnlichkeit; aus ihrer Transitivität folgt die Ähnlichkeit von  $\delta_1/\mu_1$  und  $\delta_1/\mu_1$ .

(2b) trivial.

Satz 2.4: Ist  $\delta/\mu$  eine Darstellung des Ringes  $\mathcal{R}$ , so sind die folgenden drei Eigenschaften gleichwertig:

(1)  $\delta/\mu$  ist zur (trivialen) Darstellung  $\mathcal{R}$  ähnlich,

(2)  $\delta$  zerfällt nach  $\mu$  in

$$\delta = \mu + \bar{\delta} \quad \text{mit} \quad \mu \cap \bar{\delta} = (0) \quad \text{und} \quad \bar{\delta} \cong \mathcal{R},$$

(3) es existiert ein Unterring  $\overline{\mathfrak{A}}$  von  $\mathfrak{A}$ , der aus jeder Restklasse von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  genau ein Element enthält.

Beweis: (1)  $\rightarrow$  (3): Es gibt einen Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}$ , der einen Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  induziert. Wegen der Umkehrbarkeit dieser Abbildung enthält  $\mathfrak{A}$  aus jeder Restklasse genau ein Element.

(3)  $\rightarrow$  (2): Es ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{m} + \overline{\mathfrak{A}}$  und speziell  $\mathfrak{m} \cap \overline{\mathfrak{A}} = (0)$ . Aus einem Isomorphismus  $\phi$  von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  erhält man einen Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  auf  $\overline{\mathfrak{A}}$ , wenn jedem Element  $r$  nicht die durch  $\delta$  bestimmte Restklasse von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  zugeordnet wird, sondern das Element aus dieser Restklasse, welches zu  $\overline{\mathfrak{A}}$  gehört. Denn ( $\overline{\mathfrak{A}}$  ist ein Unterring) das Produkt und die Summe zweier seiner Elemente liegt im Produkt bzw. der Summe ihrer Restklassen.

(2)  $\rightarrow$  (1): Ist  $\alpha$  ein Isomorphismus von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  auf  $\overline{\mathfrak{A}}$ , so ist jeder Restklasse eindeutig ein Element  $r$  zugeordnet. Die Abbildung jedes Elements aus dieser Restklasse auf  $r$  ist ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}$ , der  $\alpha$  induziert.

$\overline{\mathfrak{A}}$  enthält aus jeder Restklasse von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  genau ein Element. Aus  $\mathfrak{A} = \mathfrak{m} + \overline{\mathfrak{A}}$  folgt nämlich, daß  $\overline{\mathfrak{A}}$  aus jeder Restklasse mindestens eines enthält, und würde  $\overline{\mathfrak{A}}$  aus einer zwei verschiedene enthalten, etwa  $m_1 + s$  und  $m_2 + s$ , so wäre  $0 \neq m_1 - m_2 \in \mathfrak{m} \cap \overline{\mathfrak{A}}$ , denn  $\overline{\mathfrak{A}}$  ist wegen  $\overline{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{A}$  ein Unterring.

Man erhält einen Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  auf  $\overline{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{A}$ , wenn man jedem Element von  $\mathfrak{A}$ , welches  $\alpha^{-1}$  auf eine Restklasse von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  abbildet, das in  $\overline{\mathfrak{A}}$  liegende Element aus dieser Restklasse zuordnet. Dieser Isomorphismus induziert  $\alpha^{-1}$ .

Bemerkung 2.1: Im Beweis (1)  $\rightarrow$  (3) wurde nur die Verwandtschaft der beiden Darstellungen ausgenutzt.

Bemerkung 2.2: Im Beweis (2)  $\rightarrow$  (1) wurde festgestellt, daß jeder Isomorphismus von  $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$  auf  $\overline{\mathfrak{A}}$  durch einen Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{A}$  induziert wird.

Es ist nun notwendig, sich an Hand von Beispielen davon zu überzeugen, daß es die in 2.3 bis 2.5 definierten verwandten, ähnlichen

und getreuen Darstellungen wirklich gibt; auch davon, daß die Sätze 2.1 bis 2.4 keine Tautologien sind, etwa, weil alle ähnlichen oder verwandten Darstellungen wesentlich gleich sind oder, weil Darstellungen, die nicht verwandt, ähnlich oder getreu sind, überhaupt nicht existieren.

Die Darstellung  $\mathcal{D}/(0)$  jedes Ringes  $\mathcal{Q}$  ist getreu; wesentlich gleiche Darstellungen sind verwandt. Also sind die Darstellungen  $\mathcal{D}/(0)$  und  $\mathcal{D}'/(0)$  eines Ringes  $\mathcal{Q}$  ähnlich.

Die Existenz einer nicht getreuen Darstellung zeigt

Beispiel 2.1:  $\bar{\mathbb{F}}$  sei ein freier Ring,  $\mathcal{M} \subset \bar{\mathbb{F}}$ ;  $\mathfrak{d} = \bar{\mathbb{F}}/\mathcal{M}$  sei endlich.

$$\mathcal{Q} = {}_{\mathfrak{d}} \bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d} = (\bar{\mathbb{F}}/\mathcal{M}) \times (\bar{\mathbb{F}}/\mathcal{M}), \quad (\text{freie Summe}).$$

$(\mathcal{M} + \mathfrak{f}_1, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_2)$  sei die Gestalt der Elemente von  $\mathcal{Q}$ .

$(\mathfrak{f}_1, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_2)$  die der Elemente von  $\bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d}$ .

Def.:  $\bar{\mathcal{M}} = {}_{\mathfrak{d}} \bar{\mathbb{F}} \cdot \mathfrak{d} = \{ (m, \mathcal{M}) \mid m \in \mathcal{M} \}$ .

(1)  $\bar{\mathcal{M}}$  ist ein Ideal von  $\bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d}$ .

(2)  $\mathcal{Q} \cong \bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d} / \bar{\mathcal{M}}$ .

Die Abbildung  $(\mathcal{M} + \mathfrak{f}_1, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_2) \mapsto \bar{\mathcal{M}} + (\mathfrak{f}_1, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_2)$  ist eineindeutig und umfaßt alle Elemente von  $\mathcal{Q}$  und  $\bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d} / \bar{\mathcal{M}}$ . Sie ist ein Isomorphismus.

(3) Die Zuordnung  $(\mathcal{M} + \mathfrak{f}_1, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_2) : (\mathcal{M} + \mathfrak{f}_2, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_1)$  definiert einen Automorphismus von  $\mathcal{Q}$ . Im zu  $\mathcal{Q}$  isomorphen Ring  $\bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d} / \bar{\mathcal{M}}$  hat er die Gestalt  $\bar{\mathcal{M}} + (\mathfrak{f}_1, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_2) : \bar{\mathcal{M}} + (\mathfrak{f}_2, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_1)$ .

(4) Gäbe es einen Endomorphismus  $\gamma$  von  $\bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d}$ , der diesen Automorphismus induziert, so existierte in jeder Restklasse von  $\bar{\mathbb{F}}/\mathcal{M}$  ein eindeutig bestimmtes  $f_x$  mit  $(0, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_x)^{\gamma} = (f_x, \mathcal{M})$ .  $\{f_x\}$  wäre ein Unterring von  $\bar{\mathbb{F}}$ , denn

$$\begin{aligned} (f_{x_1} + f_{x_2}, \mathcal{M}) &= (f_{x_1}, \mathcal{M}) + (f_{x_2}, \mathcal{M}) \\ &= (0, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_{x_1})^{\gamma} + (0, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_{x_2})^{\gamma} \\ &= (0, \mathcal{M} + \mathfrak{f}_{x_1} + \mathfrak{f}_{x_2})^{\gamma}. \end{aligned}$$

(5) Nach Satz 2.4 würde gelten  $\{f_x\} \cong \mathfrak{d}$ , was für  $\{f_x\}$  als (notwendig unendlichen) Unterring eines freien Ringes jedoch nicht möglich ist. D.h. die Darstellung  $\bar{\mathbb{F}} \times \mathfrak{d} / \bar{\mathcal{M}}$  von  $\mathcal{Q}$  ist nicht getreu.

Beispiel 2.2:  $\mathbb{Z}$  sei der Ring der ganzen Zahlen.  $\mathbb{Z}/(10)$  besteht aus den Restklassen  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{9}$ .

$$\mathbb{Z}/(2) \cong \mathbb{Z}/(10)/(2).$$

Der einzige Homomorphismus von  $\mathbb{Z}/(10)$  in  $\mathbb{Z}$  ist  $\beta: \mathbb{Z}/(10) \rightarrow 0 \in \mathbb{Z}$ .  $\beta$  induziert jedoch keinen Isomorphismus von  $\mathbb{Z}/(10)/(2)$  auf  $\mathbb{Z}/(2)$ .

D.h. es gibt zwei Darstellungen eines Ringes, die nicht verwandt sind; sie sind nach Satz 2.3 auch nicht ähnlich. Satz 2.3 garantiert zusammen mit Beispiel 2.1 auch dafür, daß verwandte aber nicht ähnliche Darstellungen existieren.

Ähnliche und verwandte aber nicht wesentlich gleiche Darstellungen gibt es auf Grund der folgenden drei Sätze über freie Ringe.

Satz 2.5: Sämtliche Darstellungen eines freien Ringes sind ähnlich.

Beweis:  $\{\omega + s_i\}$  sei ein freies Erzeugendensystem des freien Ringes  $\mathbb{F}/\omega \cong \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}$  sei der von  $\{s_i\}$  erzeugte Unterring.

$\mathbb{F}$  enthält aus jeder Restklasse  $\omega + s_i$  genau ein Element, da sonst in den  $\omega + s_i$  eine nichttriviale Relation bestünde. Da die Darstellung der Restklassen von  $\mathbb{F}/\omega$  durch  $\omega + s_i$  eindeutig ist, enthält  $\mathbb{F}$  auch aus jeder dieser Restklassen genau ein Element. Daraus folgt nach Satz 2.4 und Satz 2.2 die Behauptung.

Bemerkung 2.3: Umgekehrt kann, wenn sämtliche Darstellungen eines Ringes  $\mathbb{Q}$  ähnlich sind, in dieser Arbeit nur gezeigt werden, daß  $\mathbb{Q}$  Unterring eines freien Ringes ist.

Nach Satz 1.1 gibt es nämlich für  $\mathbb{Q}$  eine Darstellung  $\mathbb{F}/\omega$  mit einem freien Ring  $\mathbb{F}$ ; nach Satz 2.4 zerfällt sie in  $\mathbb{F} = \omega + \bar{\mathbb{Q}}$  mit  $\omega \bar{\mathbb{Q}} = (0)$  und  $\bar{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}$ . Dabei ist  $\bar{\mathbb{Q}}$  ein Unterring von  $\mathbb{F}$ .

Satz 2.6: Zwei Darstellungen eines Ringes als Restklassenring freier Ringe sind ähnlich.

Satz 2.7: Zwei Darstellungen eines Ringes als Restklassenring freier abelscher Ringe sind ähnlich.

Zum Beweis werden die folgenden Lemmas benötigt.

Lemma 2.7: Jeder Homomorphismus  $\gamma$  eines freien Ringes  $\bar{F}$  in ein homomorphes Bild  $\bar{\mathfrak{d}}/\mathfrak{m}$  eines Ringes  $\bar{\mathfrak{d}}$  wird durch einen Homomorphismus  $\gamma$  von  $\bar{F}$  in  $\bar{\mathfrak{d}}$  induziert.

Lemma 2.8: Jeder Homomorphismus  $\gamma$  eines freien abelschen Ringes  $\bar{F}$  in ein homomorphes Bild  $\bar{\mathfrak{d}}/\mathfrak{m}$  eines kommutativen Ringes  $\bar{\mathfrak{d}}$  wird durch einen Homomorphismus  $\gamma$  von  $\bar{F}$  in  $\bar{\mathfrak{d}}$  induziert.

Der Beweis der beiden Lemmas wird gemeinsam geführt.

Beweis: Vorgegeben ist  $\bar{\gamma} : f \mapsto \mathfrak{m} + S(f) \in \bar{\mathfrak{d}}/\mathfrak{m}$ .

$\{x_\lambda\}$  ( $\lambda \in K$ ,  $K$  eine Indexmenge) sei ein freies Erzeugendensystem von  $\bar{F}$ . Nach § 1 hat  $f$  eine eindeutige Darstellung aus diesen Erzeugenden (wobei der Begriff der Eindeutigkeit davon abhängt, ob die Situation von Lemma 2.7 oder von Lemma 2.8 vorliegt).

Es gilt auch  $\bar{\gamma} : x_\lambda \mapsto \mathfrak{m} + S(x_\lambda) \in \bar{\mathfrak{d}}/\mathfrak{m}$  für alle  $\lambda \in K$ .

Dieses zunächst nicht eindeutig bestimmte  $S(x_\lambda)$  wird von nun an fest gewählt.

$$\begin{aligned} \gamma : f \mapsto S(f) &= S\left(N_1 \frac{x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_n}}{1!} x_{\lambda_1} + \dots + N_m \frac{x_{\lambda_m} \dots x_{\lambda_m}}{1!} x_{\lambda_m}\right) = \\ &= N_1 \frac{x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_n}}{1!} S(x_{\lambda_1}) + \dots + N_m \frac{x_{\lambda_m} \dots x_{\lambda_m}}{1!} S(x_{\lambda_m}). \end{aligned}$$

Da  $\bar{F}$  ein freier Ring ist, ist das eine eindeutige Abbildung; das gilt auch im Fall des freien abelschen Ringes, denn  $\bar{\mathfrak{d}}$  ist ebenfalls kommutativ.

$\gamma$  ist ein Homomorphismus von  $\bar{F}$  in  $\bar{\mathfrak{d}}$  und induziert  $\bar{\gamma}$ .

Beweis der Sätze 2.6 und 2.7: Es sei  $\bar{F}_{1/\mathfrak{m}_1} \cong \mathfrak{A} \cong \bar{F}_{2/\mathfrak{m}_2}$ ,

$\alpha, \alpha^{-1}$  seien reziproke Isomorphismen mit  $(\bar{F}_{1/\mathfrak{m}_1})^\alpha = \bar{F}_{2/\mathfrak{m}_2}$  und

$(\bar{F}_{2/\mathfrak{m}_2})^{\alpha^{-1}} = \bar{F}_{1/\mathfrak{m}_1}$ . Die Abbildungen

$$\bar{\gamma}_1 : f_1 \mapsto (\mathfrak{m}_1 + f_1)^\alpha \in \bar{F}_{2/\mathfrak{m}_2},$$

$$\bar{\gamma}_2 : f_2 \mapsto (\mathfrak{m}_2 + f_2)^{\alpha^{-1}} \in \bar{F}_{1/\mathfrak{m}_1}$$

sind Homomorphismen von  $\bar{F}_1$  in  $\bar{F}_{2/\mathfrak{m}_2}$  bzw.  $\bar{F}_2$  in  $\bar{F}_{1/\mathfrak{m}_1}$ . Sie induzieren  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$ .

Nach Lemma 2.7 und 2.8 existieren Homomorphismen  $\gamma_1$  von  $\bar{F}_1$  in  $\bar{F}_2$  und  $\gamma_2$  von  $\bar{F}_2$  in  $\bar{F}_1$ , die  $\bar{\gamma}_1$  bzw.  $\bar{\gamma}_2$  induzieren. Nach Lemma 2.3 induzieren sie auch  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$ .

## 2.4. Ähnliche und verwandte Ringe.

Def.2.6: Zwei Ringe  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  heißen ähnlich, wenn je zwei isomorphe Darstellungen  $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{M}}$  und  $\mathfrak{B}/_{\mathfrak{N}}$  ähnlich sind.

Def.2.7: Zwei Ringe  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  heißen verwandt, wenn je zwei isomorphe Darstellungen  $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{M}}$  und  $\mathfrak{B}/_{\mathfrak{N}}$  verwandt sind.

Def.2.8: Ein Ring  $\mathfrak{A}$  heißt selbstähnlich, wenn jede Darstellung  $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{M}}$  getreu ist.

Satz 2.8: Zwei Ringe sind ähnlich, wenn sie verwandt sind und jeder selbstähnlich ist.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 2.3.

Bemerkung 2.4: Die Umkehrung gilt nicht, denn (o) und jeder nicht selbstähnliche Ring, z.B.  $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$  aus Beispiel 2.1, sind ähnlich.

Satz 2.9: Je zwei freie Ringe und je zwei freie abelsche Ringe sind ähnlich.

Beweis: Man wende die Sätze 2.6 und 2.7 an.

Lemma 2.9: (1)  $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{M}_1}$  und  $\mathfrak{B}/_{\mathfrak{M}_2}$  seien Darstellungen eines Ringes durch zwei verwandte Ringe  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$ .

(2)  $\mathfrak{B}_2$  sei selbstähnlich.

(3)  $\gamma$  sei ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}_1$  in  $\mathfrak{B}_2$ , der einen Isomorphismus  $\gamma''$  von  $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{M}_1}$  auf  $\mathfrak{B}/_{\mathfrak{M}_2}$  induziert.

Dann gibt es einen Homomorphismus von  $\mathfrak{B}_2$  in  $\mathfrak{A}_1$ , der den reziproken Isomorphismus  $\gamma''^{-1}$  induziert.

Beweis: Nach (1) gibt es einen Homomorphismus  $\gamma$  von  $\mathfrak{A}_1$  in  $\mathfrak{B}_2$  und einen Homomorphismus  $\bar{\gamma}$  von  $\mathfrak{B}_2$  in  $\mathfrak{A}_1$ , die reziproke Isomorphismen  $\gamma''$  bzw.  $\bar{\gamma}'' = \gamma''^{-1}$  zwischen  $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{M}_1}$  und  $\mathfrak{B}/_{\mathfrak{M}_2}$  induzieren.  $(\bar{\gamma}'' \gamma'')^{-1}$  ist ein Automorphismus von  $\mathfrak{B}/_{\mathfrak{M}_2}$ , der auf Grund von (2) von einem Endomorphismus  $\varepsilon$  von  $\mathfrak{B}_2$  induziert wird. Nach Lemma 2.2 induziert der Homomorphismus  $\varepsilon \bar{\gamma}$  von  $\mathfrak{B}_2$  in  $\mathfrak{A}_1$  den Isomorphismus  $(\bar{\gamma}'' \gamma'')^{-1} \bar{\gamma}'' = \gamma''^{-1} \bar{\gamma}''^{-1} \bar{\gamma}'' = \gamma''^{-1}$  von  $\mathfrak{B}/_{\mathfrak{M}_2}$  auf  $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{M}_1}$ .

### § 3. Kommutatorideale und Hauptsatz.

#### 3.1. Kommutatorideale.

Def.3.1: (a) Der Kommutator zweier Elemente  $a, b$  eines Ringes

$$[a, b] = ab - ba.$$

(b) Das Kommutatorideal  $[a, b]$  zweier Ideale  $a, b$  eines Ringes ist das von den Kommutatoren  $[a, b]$  erzeugte Ideal.

Def.3.2: Sind  $a, b$  Ideale eines Ringes, so ist  $a + b$  ( $a \cdot b$ ) das von den Elementen  $a+b$  ( $ab$ ) erzeugte Ideal.

Für jedes Paar Ideale  $u \leq v$  des Ringes  $\mathfrak{A}$  wird nun eine Anzahl Kommutatorideale  $\mathcal{L}_{s,w}(u, v)$  durch die folgende rekursive Vorschrift erklärt.

Def.3.3:

$$(1) \mathcal{L}_{0,1}(u, v) =_f uv,$$

$$(2) \mathcal{L}_{s,w}(u, v) =_f [\mathcal{L}_{s_1, w_1}(u, v), \mathcal{L}_{s_2, w_2}(u, v)] + [\mathcal{L}_{s_1, w_1}(u, v), \mathcal{L}_{s_2, w_2}(u, v)],$$

wobei  $s =_f 1 + \max(s_1, s_2), w =_f w_1 + w_2$ .

$$(3) \mathcal{L}_{s_1, w_1}(u) =_f \mathcal{L}_{s_1, w_1}(u, v).$$

Man findet

$$(3.1) [a, b] = [b, a] \text{ und } a + b = b + a.$$

$$(3.2) \mathcal{L}_{s,w}(u) \subseteq \mathcal{L}_{s,w}(u, v) \subseteq \mathcal{L}_{s,w}(u).$$

Da es Kommutatorideale gibt, die ihren Kommutatorunterring echt enthalten, (Beispiel 10.3, (10.9)), werden in Definition 3.1, (b) explizit Kommutatorideale verlangt.

Die Bezeichnung der Kommutatorideale durch  $\mathcal{L}_{s,w}(u, v)$  ist nicht eineindeutig.

Def.3.4: Reine Kommutatoren:

$$(1) \mathcal{L}_{0,1}(u, \mathfrak{A}) =_f uv,$$

$$(2) \mathcal{L}_{s+1, w+1}(u, \mathfrak{A}) =_f [\mathcal{L}_{s, s+1}(u, \mathfrak{A}), \mathcal{L}_{0,1}(\mathfrak{A})] + [\mathcal{L}_{s, s+1}(\mathfrak{A}), \mathcal{L}_{0,1}(u, \mathfrak{A})].$$

Zu jeder der Zahlen  $s = 0, 1, 2, \dots$  gibt es genau einen reinen Kommutator. Es ist deshalb zweckmäßig eine neue Schreibweise einzuführen.

Def. 3.5:  $i_{\mathcal{A}\mathcal{W}} = \varphi_i \mathcal{L}_{i,i+1}(\mathcal{A}\mathcal{W}, \mathcal{Q})$ ,

$$i\mathcal{Q} = \varphi_i \mathcal{L}_{i,i+1}(\mathcal{Q}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$(3.3) \quad 0_{\mathcal{A}\mathcal{W}} = \mathcal{A}\mathcal{W}$$

$$i_{\mathcal{A}\mathcal{W}} = [i-1_{\mathcal{A}\mathcal{W}}, 0_{\mathcal{Q}}] + [i-1_{\mathcal{Q}}, 0_{\mathcal{A}\mathcal{W}}]$$

$$0_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$$

$$i\mathcal{Q} = [i-1_{\mathcal{Q}}, 0_{\mathcal{Q}}]$$

Def. 3.6: Halbreine Kommutatoren:

$$(1) \mathcal{L}'_{0,1}(\mathcal{A}\mathcal{W}, \mathcal{Q}) = \varphi_{\mathcal{A}\mathcal{W}},$$

$$(2) \mathcal{L}'_{s,w}(\mathcal{A}\mathcal{W}, \mathcal{Q}) = \varphi_s [\mathcal{L}'_{s_1,w_1}(\mathcal{A}\mathcal{W}, \mathcal{Q}), s_2\mathcal{Q}] + [\mathcal{L}'_{s_1,w_1}(\mathcal{Q}), s_2\mathcal{A}\mathcal{W}],$$

$$\text{wobei } s = \varphi_s 1 + \max(s_1, s_2), \quad w = \varphi_s w_1 + s_2 + 1.$$

Halbreine Kommutatoren werden mit einem Strich gekennzeichnet. Reikommutatorideale sind halbrein.

Def. 3.7: Kommutatorquotient:

Sind  $\mathcal{A}\mathcal{W}$  und  $\mathcal{A}\mathcal{W}$  Ideale eines Ringes  $\mathcal{Q}$ , so ist

$\mathcal{A}\mathcal{W} + \mathcal{A}\mathcal{W}$  das von den Elementen  $r$  mit  $[r, \mathcal{A}\mathcal{W}] \subseteq \mathcal{A}\mathcal{W}$  erzeugte Ideal.

### 3.2. Hauptsatz.

[I.S. 311], [III.S. 181].

Satz 3.1 (Hauptsatz):

Voraussetzung:  $\delta_1/\mathcal{A}\mathcal{W}_1$  und  $\delta_2/\mathcal{A}\mathcal{W}_2$  seien verwandte Darstellungen eines Ringes  $\mathcal{Q}$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  verbindende Homomorphismen.

Behauptung:  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  induzieren reziproke Isomorphismen zwischen allen Restklassenringen

$$\mathcal{L}'_{s,w}(\delta_1)/\mathcal{L}'_{s,w}(\mathcal{A}\mathcal{W}_1, \delta_1) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}'_{s,w}(\delta_2)/\mathcal{L}'_{s,w}(\mathcal{A}\mathcal{W}_2, \delta_2).$$

Bemerkung 3.1: Daß dieser Satz nicht für alle Kommutatoren von Definition 3.3 gezeigt werden konnte, liegt daran, daß

$\mathcal{L}_{s,w}(\delta)/\mathcal{A}\mathcal{W} \subseteq \mathcal{L}_{s,w}(\mathcal{A}\mathcal{W}, \delta)$  in dieser Arbeit nur für halbreine Kommutatoren bewiesen werden konnte. (Siehe den Beweis des Hauptsatzes in § 5 und den Beweis von Lemma 5.1, (3).)

Bemerkung 3.2: Die Voraussetzung ist identisch mit der Behauptung für  $s = 0$ .

Einem (von R.BAER verallgemeinerten) Satz von H.HOPF aus der Gruppentheorie entspricht

Satz 3.2:  $\bar{F}_1/\omega_1$  und  $\bar{F}_2/\omega_2$  seien Darstellungen eines Ringes durch freie Ringe  $\bar{F}_1$  und  $\bar{F}_2$ .

Dann sind die Restklassenringe

$$\mathcal{L}_{s,w}(\bar{F}_1)/\mathcal{L}'_{s,w}(\omega_1, \bar{F}_1) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}'_{s,w}(\bar{F}_2)/\mathcal{L}_{s,w}(\omega_2, \bar{F}_2) \quad \text{isomorph.}$$

Beweis: Nach Satz 2.6 sind Darstellungen eines Ringes als Restklassenringe freier Ringe ähnlich, nach Satz 2.3 sind ähnliche Darstellungen verwandt. Aus dem Hauptsatz folgt nun die Behauptung.

Def. 3.8: „Der Hauptsatz gilt für die Kommutatorideale  $\mathcal{L}_{s,w}(\omega, \bar{\imath})$ “,

wenn jedes Paar verbindender Homomorphismen je zweier verwandter Darstellungen  $\bar{\imath}_1/\omega_1$  und  $\bar{\imath}_2/\omega_2$  reziproke Isomorphismen zwischen  $\mathcal{L}_{s,w}(\bar{\imath}_1)/\mathcal{L}_{s,w}(\omega_1, \bar{\imath}_1)$  und  $\mathcal{L}_{s,w}(\bar{\imath}_2)/\mathcal{L}_{s,w}(\omega_2, \bar{\imath}_2)$  induziert.

## § 4. Kommutatorformeln.

Es werden einige (darunter auch bekannte) Formeln für Kommutatorideale abgeleitet, die zum Beweis des Hauptsatzes gebraucht werden.

### 4.1. Formeln für Ringelemente.

Man bestätigt leicht:

$$(4.1) \quad [a, b] = -[b, a]$$

$$(4.2) \quad [a+b, c] = [a, c] + [b, c]$$

$$(4.3) \quad [a, b]c = c[a, b] + [[a, b], c]$$

$$(4.4.1) \quad [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

$$(4.4.2) \quad [[[a, b], c], d] + [[[d, c], b], a] + [[[c, d], a], b] + \\ + [[[b, a], d], c] = 0$$

$$(4.5.1) \quad [a, b]c = [a, bc] + b[c, a]$$

$$(4.5.2) \quad [a, b]c = a[b, c] + [ac, b]$$

$$(4.5.3) \quad c[a, b] = [ca, b] + [b, c]a$$

$$(4.5.4) \quad c[a, b] = [a, cb] + [c, a]b$$

$$(4.6) \quad [a, bc] = [ca, b] + [ab, c]$$

$$(4.7.1) \quad [a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$$

$$(4.7.2) \quad [ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$$

$$(4.8) \quad [a, \sum_{v=1}^n b_v] = \sum_{v=1}^n [a, b_v] \quad \text{folgt aus (4.2) und (4.1) durch vollständige Induktion.}$$

$$(4.9) \quad [a, \prod_{\mu=1}^n b_\mu] = \sum_{\mu=1}^n \left( \prod_{\mu=1}^{\mu-1} b_\mu [a, b_\mu] \prod_{\mu+1}^n b_\mu \right)$$

Beweis:  $n=1: [a, \prod_{\mu=1}^1 b_\mu] = [a, b_1] = \sum_{\mu=1}^1 [a, b_\mu]$

$$\begin{aligned} n-1 \rightarrow n: [a, \prod_{\mu=1}^n b_\mu] &= [a, \left( \prod_{\mu=1}^{n-1} b_\mu \right) b_n] = \\ &= [a, \prod_{\mu=1}^{n-1} b_\mu] b_n + \prod_{\mu=1}^{n-1} b_\mu [a, b_n] \quad \text{nach (4.7.1)} \\ &= \left( \sum_{\mu=1}^{n-1} \left( \prod_{\mu=1}^{\mu-1} b_\mu [a, b_\mu] \prod_{\mu+1}^{n-1} b_\mu \right) \right) b_n + \prod_{\mu=1}^{n-1} b_\mu [a, b_n] \\ &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \left( \prod_{\mu=1}^{\mu-1} b_\mu [a, b_\mu] \prod_{\mu+1}^{n-1} b_\mu \right) + \prod_{\mu=1}^{n-1} b_\mu [a, b_n] \\ &= \sum_{\mu=1}^n \left( \prod_{\mu=1}^{\mu-1} b_\mu [a, b_\mu] \prod_{\mu+1}^n b_\mu \right). \end{aligned}$$

## 4.2. Formeln für Ideale.

$a, b, c$  seien Ideale eines Ringes  $\mathcal{R}$ .

(4.10) Jedes Element des Ideals  $[a, b]$  ist eine Summe von Elementen der beiden Typen  $[a, b]$  und  $[a, b]r$  (oder  $[a, b]$  und  $r[a, b]$ ). [IV].

Beweis: Aus den vier Typen  $[a, b]$ ,  $[a, b]r$ ,  $r[a, b]$ ,  $r_1[a, b]r_2$  kann jedes Element als Summe dargestellt werden. Nun gilt

$$\begin{aligned} r[a, b] &= [a, b]r - [[a, b], r] \quad \text{nach (4.3)} \\ &= [a, b]r + [[b, r], a] + [[r, a], b] \quad \text{nach (4.4.1)} \\ &= [a, b]r + [b', a] + [a', b]. \end{aligned}$$

$$r_1[a, b]r_2 = ([a, b]r_1 + [b', a] + [a', b])r_2.$$

Damit sind die vier Typen auf zwei verringert.

Analog folgt die in Klammern stehende Behauptung.

$$(4.11.1) \quad [a, b]c \subseteq [a, bc] + b[c, a]$$

Beweis: Nach (4.10) kann man jedes Element aus  $[a, b]c$  als eine Summe von Ausdrücken der Form  $[a, b]c$  schreiben. Wegen (4.5.1) gilt

$$[a, b]c = [a, bc] + b[c, a] \in [a, bc] + b[c, a].$$

Ähnlich ergibt sich aus (4.5.2), (4.5.3), (4.5.4), (4.6) und (4.7.1):

$$(4.11.2) \quad [a, b]c \subseteq a[b, c] + [ac, b]$$

$$(4.11.3) \quad c[a, b] \subseteq [ca, b] + [b, c]a$$

$$(4.11.4) \quad c[a, b] \subseteq [c, ab] + [a, cb]$$

Gleichheit liegt im allgemeinen nicht vor; siehe Beispiel 10.4, (10.18).

$$(4.12) \quad [a + b, c] = [a, c] + [b, c]$$

Beweis: Aus (4.2) folgt  $[a + b, c] \subseteq [a, c] + [b, c]$ . Die Umkehrung ist trivial.

$$(4.13) \quad [a, bc] \subseteq [a, b]c + b[a, c]$$

$$(4.14) \quad [a, bc] \subseteq [ca, b] + [ab, c]$$

### 4.3. Reine Kommutatoren.

Def.4.2:  ${}^0\mathcal{R}'' = {}_1\mathcal{R}$

$${}^0\mathcal{W}'' = {}_1\mathcal{W}$$

$${}^i\mathcal{R}'' = {}_1[{}^0\mathcal{R}'', {}^{i-1}\mathcal{R}'']$$

$${}^i\mathcal{W}'' = {}_1[{}^{i-1}\mathcal{W}'', {}^0\mathcal{R}'']$$

Die Ideale  ${}^i\mathcal{R}''$  sind nach (3.3) reine Kommutatoren, die Ideale  ${}^i\mathcal{W}''$  für  $i \geq 2$  scheinbar nicht.  ${}^i\mathcal{R}'' = {}^i\mathcal{R}$ ; später wird gezeigt werden, daß auch  ${}^i\mathcal{W}'' = {}^i\mathcal{W}$ . Der Bequemlichkeit halber sollen jedoch hier in 4.3 schon jetzt die Ideale  ${}^i\mathcal{W}''$  als  ${}^i\mathcal{W}$  geschrieben werden.

Man findet:

$$(4.15) \quad {}_i({}_j\mathcal{U}) = {}_{i+j}\mathcal{U}.$$

$$(4.16) \text{ Aus } \mathcal{U} \leq \mathcal{L} \text{ folgt } {}_i\mathcal{U} \leq {}_i\mathcal{L} \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots.$$

Beweis:  $i=0$ : trivial.

$i=1$ : jedes erzeugende Element  $[a, r]$  von  ${}_1\mathcal{U}$  liegt in  ${}_1\mathcal{L}$ .

$$i-1 \rightarrow i: {}_i\mathcal{U} = {}_1({}_{i-1}\mathcal{U}) \leq {}_1({}_{i-1}\mathcal{L}) = {}_i\mathcal{L}.$$

$$(4.17) \quad {}_i(\mathcal{U} + \mathcal{L}) = {}_i\mathcal{U} + {}_i\mathcal{L} \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots.$$

Beweis:  $i=0$ : trivial.

$$\begin{aligned} i-1 \rightarrow i: {}_i(\mathcal{U} + \mathcal{L}) &= [{}_{i-1}(\mathcal{U} + \mathcal{L}), \mathcal{R}] = [{}_{i-1}\mathcal{U} + {}_{i-1}\mathcal{L}, \mathcal{R}] \text{ nach Ind.-Vor.} \\ &= [{}_{i-1}\mathcal{U}, \mathcal{R}] + [{}_{i-1}\mathcal{L}, \mathcal{R}] = {}_i\mathcal{U} + {}_i\mathcal{L} \text{ nach (4.12).} \end{aligned}$$

$$(4.18) \quad {}_1(\mathcal{U}\mathcal{L}) \leq {}_1\mathcal{U}\mathcal{L} + \mathcal{U}{}_1\mathcal{L}, \text{ denn}$$

$$\begin{aligned} {}_1(\mathcal{U}\mathcal{L}) &= [\mathcal{R}, \mathcal{U}\mathcal{L}] \leq [\mathcal{R}, \mathcal{U}]\mathcal{L} + \mathcal{U}[\mathcal{R}, \mathcal{L}] \text{ nach (4.13)} \\ &= {}_1\mathcal{U}\mathcal{L} + \mathcal{U}{}_1\mathcal{L}. \end{aligned}$$

$$(4.19) \quad {}_i(\mathcal{U}\mathcal{L}) \leq {}_i\mathcal{U} \cap {}_i\mathcal{L} \text{ für } i = 1, 2, \dots.$$

Beweis:  $i=1$ : jedes erzeugende Element  ${}_1c = [c_1, c_2]$  von  ${}_1(\mathcal{U}\mathcal{L})$  mit  $c_1, c_2$  aus  $\mathcal{U}\mathcal{L}$  liegt in  ${}_1\mathcal{U}$  und in  ${}_1\mathcal{L}$ .

$$\begin{aligned} i-1 \rightarrow i: {}_i(\mathcal{U}\mathcal{L}) &= {}_1({}_{i-1}(\mathcal{U}\mathcal{L})) \leq {}_1({}_{i-1}\mathcal{U} \cap {}_{i-1}\mathcal{L}) \text{ nach Ind.-Vor. und (4.16)} \\ &\leq {}_1({}_{i-1}\mathcal{U}) \cap {}_1({}_{i-1}\mathcal{L}) = {}_i\mathcal{U} \cap {}_i\mathcal{L}. \end{aligned}$$

In den folgenden Formeln (4.20) und (4.21) kommen die Ideale  ${}^i\mathcal{W}''$  nur mit  $i > 2$  vor; für diese gilt auf Grund ihrer Definition

$${}^i\mathcal{W}'' = {}^i\mathcal{W}.$$

$$(4.20) \quad {}_1\mathcal{U}\mathcal{W} \leq [\mathcal{U}, \mathcal{W}] ; \mathcal{W}{}_1\mathcal{U} \leq [\mathcal{U}, \mathcal{W}].$$

Beweis:  ${}_1\mathcal{U}\mathcal{W} = [\mathcal{R}, \mathcal{U}]\mathcal{W} \leq \mathcal{R}[\mathcal{U}, \mathcal{W}] + [\mathcal{R}\mathcal{W}, \mathcal{U}] \leq [\mathcal{U}, \mathcal{W}] \text{ nach (4.11.2).}$

Analog folgt  $\mathcal{W}{}_1\mathcal{U} \leq [\mathcal{U}, \mathcal{W}] \text{ aus (4.11.3).}$

(4.21) Bezeichnet man mit  $\mathfrak{M}$  das Ideal  $[\mathfrak{M}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}, [\mathfrak{M}, \mathfrak{c}]]$ , so sind die folgenden sechs Eigenschaften gleichwertig mit  $[\mathfrak{M}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] \subseteq \mathfrak{M}$ :

$$(4.21.1) \quad {}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] \subseteq \mathfrak{M}$$

$$(4.21.2) \quad [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]_1\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$$

$$(4.21.3) \quad [{}_1\mathfrak{M}, \mathfrak{b}]\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{M}$$

$$(4.21.4) \quad \mathfrak{c}[{}_1\mathfrak{M}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{M}$$

$$(4.21.5) \quad [\mathfrak{c}, {}_1\mathfrak{M}]\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{M}$$

$$(4.21.6) \quad \mathfrak{b}[\mathfrak{c}, {}_1\mathfrak{M}] \subseteq \mathfrak{M}$$

Beweis von (4.21.1): (I)  $[\mathfrak{M}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]]$  wird nach (4.10) und (4.2) erzeugt von Elementen der beiden Typen  $[a, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]]$  und  $[a, \mathfrak{r}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]]$ .

$$[a, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] = [[a, \mathfrak{b}], \mathfrak{c}] + [[\mathfrak{c}, a], \mathfrak{b}] \in \mathfrak{M} \quad \text{nach (4.4.1)}$$

$$[a, \mathfrak{r}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] = [a, \mathfrak{r}][\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + \mathfrak{r}[a, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] \quad \text{nach (4.7.1)}$$

$$\in {}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}.$$

$$(II) {}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] \subseteq [\mathfrak{M}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] \subseteq \mathfrak{M} \quad \text{nach (4.20).}$$

Beweis von (4.21.3):  $[{}_1\mathfrak{M}, \mathfrak{b}]\mathfrak{c} \subseteq [{}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + [{}_1\mathfrak{M}\mathfrak{c}, \mathfrak{b}]]$  nach (4.11.2)

$$\subseteq [{}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + [[\mathfrak{M}, \mathfrak{c}], \mathfrak{b}]] \quad \text{nach (4.20)}$$

$$\subseteq [{}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + \mathfrak{M}] \subseteq \mathfrak{M} \quad \text{nach (4.21.1).}$$

$${}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] \subseteq [{}_1\mathfrak{M}, \mathfrak{b}]\mathfrak{c} + [{}_1\mathfrak{M}\mathfrak{c}, \mathfrak{b}] \quad \text{nach (4.11.4)}$$

$$\subseteq [{}_1\mathfrak{M}, \mathfrak{b}]\mathfrak{c} + [[\mathfrak{M}, \mathfrak{c}], \mathfrak{b}] \quad \text{nach (4.20)}$$

$$\subseteq [{}_1\mathfrak{M}, \mathfrak{b}]\mathfrak{c} + \mathfrak{M} = \mathfrak{M}.$$

Beweis von (4.21.5):  $[\mathfrak{c}, {}_1\mathfrak{M}]\mathfrak{b} \subseteq [\mathfrak{c}, {}_1\mathfrak{M}\mathfrak{b}] + [{}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]]$  nach (4.11.1)

$$\subseteq [{}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] + [\mathfrak{c}, [\mathfrak{M}, \mathfrak{b}]] \quad \text{nach (4.20)}$$

$$\subseteq [{}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] + \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \quad \text{nach (4.21.1).}$$

$${}_1\mathfrak{M}[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] \subseteq [{}_1\mathfrak{M}\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + [\mathfrak{c}, {}_1\mathfrak{M}]\mathfrak{b} \quad \text{nach (4.11.3)}$$

$$\subseteq [\mathfrak{c}, {}_1\mathfrak{M}]\mathfrak{b} + \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \quad \text{nach (4.20).}$$

Die Beweise von (4.21.2), (4.21.4) und (4.21.6) verlaufen analog.

(4.22) Ist eines der Ideale  $\mathfrak{M}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$  gleich  $\mathfrak{Q}$ , so gilt

$$[\mathfrak{M}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] \subseteq [[\mathfrak{M}, \mathfrak{b}], \mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}, [\mathfrak{M}, \mathfrak{c}]].$$

Für Gruppen gilt die entsprechende Formel ohne diese Voraussetzung; für Ringe konnte außer (4.21) nichts näheres festgestellt werden.

Beweis:  $r = \mathcal{Q} : [{}_1r, b]\mathcal{Q} = [{}_1r, \mathcal{Q}], b]\mathcal{Q} \subseteq [{}_1b, [{}_1r, \mathcal{Q}]] \subseteq \mathcal{M}$ ; nun gilt die Behauptung nach (4.21.3).

$b = \mathcal{Q} : [r, {}_1r]\mathcal{Q} = [r, [{}_1r, \mathcal{Q}]]\mathcal{Q} \subseteq [{}_1r, \mathcal{Q}], r] \subseteq \mathcal{M}$ ; (4.21.5) liefert die Behauptung.

$$\begin{aligned} u = \mathcal{Q} : [{}^1\mathcal{Q}, b]c &\subseteq [{}_1b, \mathcal{Q}]c \text{ nach (4.22) für } u' = b, b' = c' = \mathcal{Q} \\ &\subseteq [{}_1b, \mathcal{Q}]c + \mathcal{Q}[c, {}_1b] \text{ nach (4.11.1)} \\ &\subseteq [{}_1b, c] \subseteq \mathcal{M}; \end{aligned}$$

aus (4.21.3) folgt die Behauptung.

Für die Ideale der Definition 4.2 werden nun zwei Formeln bewiesen, die von S.A.JENNINGS stammen, [IV.S.344]. Dort ist zwar  ${}^1\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{M}$  und  ${}^i\mathcal{Q} = (0)$  für  $i \geq i_0$  vorausgesetzt, doch sind diese Einschränkungen für den Beweisgang unerheblich.

$$(4.23) \quad j\mathcal{M}^i\mathcal{Q} \subseteq j+1\mathcal{M}; \quad {}^i\mathcal{Q} \cdot j\mathcal{M} \subseteq j+1\mathcal{M}; \quad i, j \geq 0.$$

Beweis: Es genügt die erste der beiden Formeln zu verifizieren.

$$i=0, \text{ alle } j: j\mathcal{M}^0\mathcal{Q} = j\mathcal{M}\mathcal{Q} \subseteq j\mathcal{M} = j+0\mathcal{M}.$$

$$\begin{aligned} i+1, \text{ alle } j: j\mathcal{M}^{i+1}\mathcal{Q} &= j\mathcal{M}[{}^i\mathcal{Q}, \mathcal{Q}] \\ &\subseteq [{}_1\mathcal{Q}, j\mathcal{M}]{}^i\mathcal{Q} + [{}_1j\mathcal{M}, {}^i\mathcal{Q}, \mathcal{Q}] \text{ nach (4.11.3)} \\ &\subseteq j+1\mathcal{M}^i\mathcal{Q} + [{}_1j+1\mathcal{M}, {}^i\mathcal{Q}] \text{ nach Ind.-Voraussetzung} \\ &\subseteq j+i+1\mathcal{M} + j+i+1\mathcal{M} \text{ nach Ind.-Voraussetzung} \\ &= j+i+1\mathcal{M}. \end{aligned}$$

$$(4.24) \quad [{}^i\mathcal{Q}, j\mathcal{M}] \subseteq j+i+1\mathcal{M}; \quad i, j \geq 0.$$

$$\text{Beweis: } i=0, \text{ alle } j: [{}_1\mathcal{Q}, j\mathcal{M}] = j+1+0\mathcal{M}.$$

$$\begin{aligned} i+1, \text{ alle } j: [{}^{i+1}\mathcal{Q}, j\mathcal{M}] &= [{}_1j\mathcal{M}, [{}^i\mathcal{Q}, \mathcal{Q}]] \\ &\subseteq [{}_1j\mathcal{M}, {}^i\mathcal{Q}], \mathcal{Q}] + [{}^i\mathcal{Q}, [{}_1j\mathcal{M}, \mathcal{Q}]] \text{ nach (4.22) *} \\ &\subseteq [{}_1j+i+1\mathcal{M}, {}^i\mathcal{Q}] + [{}^i\mathcal{Q}, j+i+1\mathcal{M}] \text{ nach Ind.-Voraus.} \\ &\subseteq j+i+2\mathcal{M} + j+i+2\mathcal{M} \text{ nach Ind.-Voraus.} \\ &= j+i+2\mathcal{M}. \end{aligned}$$

$$(4.25) \quad [{}^i\mathcal{Q}''', \mathcal{M}'''] \subseteq [{}_1i\mathcal{M}''', \mathcal{Q}''']$$

Beweis: Man setze in (4.24)  $j = 0$ .

Wie zu Beginn von 4.3 behauptet gilt für die Ideale  $j\mathcal{M}''$  der Definition 4.2:

\*) Der Beweis läßt sich auch direkt, ohne Benutzung von (4.22) durchführen.

$$(4.26) \quad {}_i\mu\nu = {}_i\mu\nu'' \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Beweis:  $i=0: {}_0\mu\nu = \mu\nu = {}_0\mu\nu''$

$$\begin{aligned} i-1 \rightarrow i: {}_i\mu\nu &= [{}_{i-1}\mu, \mathfrak{Q}] + [\mu, {}^{i-1}\mathfrak{Q}] \\ &= [{}_{i-1}\mu'', \mathfrak{Q}'] + [\mu'', {}^{i-1}\mathfrak{Q}'] \text{ nach Ind.-Voraussetzung} \\ &= [{}_{i-1}\mu'', \mathfrak{Q}'] = {}_i\mu\nu'' \quad \text{nach (4.25).} \end{aligned}$$

$$(4.27) \quad i\mathfrak{Q}.\mu \in {}_i\mu\nu \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Beweis: Man setze in (4.23)  $j = 0$ .

Diese Formel wird gebraucht zum Beweis des Hauptsatzes.

(4.28) Im allgemeinen existiert für einen Ring  $\mathfrak{Q}$  keine natürliche Zahl  $n$  so, daß  $n\mathfrak{Q} \in [{}^1\mathfrak{Q}, {}^1\mathfrak{Q}]$ .

Beweis: Siehe Beispiel 10.1, (10.2).

#### 4.4. Halbreine Kommutatoren.

$$(4.29) \quad \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}).\mu\nu \leq \mathcal{L}'_{s,w}(\mu\nu, \mathfrak{Q}) \geq \mu\nu.\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}).$$

Beweis:  $s=0: \mathcal{L}'_{0,1}(\mathfrak{Q}).\mu\nu = \mathfrak{Q}.\mu\nu \leq \mu\nu = \mathcal{L}'_{0,1}(\mu\nu, \mathfrak{Q}).$

$$\begin{aligned} s-1 \rightarrow s: \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}).\mu\nu &= [{}^s\mathfrak{Q}, \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q})]\mu\nu = \\ &\leq [{}^s\mathfrak{Q}, \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}).\mu\nu] + \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}).[\mu\nu, {}^s\mathfrak{Q}] \text{ nach (4.11.1)} \\ &\leq [{}^s\mathfrak{Q}, \mathcal{L}'_{s,w}(\mu\nu, \mathfrak{Q})] + \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}).[\mathfrak{Q}, {}_s\mu\nu] \text{ nach (4.25)} \\ &\quad \text{und Induktionsvoraussetzung} \\ &= [{}^s\mathfrak{Q}, \mathcal{L}'_{s,w}(\mu\nu, \mathfrak{Q})] + [{}_s\mu\nu, \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q})] \text{ nach (4.20)} \\ &= \mathcal{L}'_{s,w}(\mu\nu, \mathfrak{Q}). \end{aligned}$$

Analog folgt der zweite Teil der Behauptung.

Diese Formel wird zum Beweis des Hauptsatzes benötigt.

$$(4.30) \quad [\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}), \mu\nu] \leq \mathcal{L}'_{s,w}({}_1\mu\nu, \mathfrak{Q}).$$

Beweis:  $s=0: [\mathcal{L}'_{0,1}(\mathfrak{Q}), \mu\nu] = [\mathfrak{Q}, \mu\nu] = {}_1\mu\nu = \mathcal{L}'_{0,1}({}_1\mu\nu, \mathfrak{Q}).$

$s-1 \rightarrow s: [\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}), \mu\nu]$  wird nach (4.10) und (4.2) erzeugt von Elementen der beiden Typen  $[[c_1, c_2], m]$  und  $[[c_1, c_2]r, m]$ .

$$\begin{aligned} (a) [[c_1, c_2], m] &= [c_1, [c_2, m]] + [c_2, [m, c_1]] \text{ nach (4.4.1)} \\ &\in [\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}), [\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}), \mu\nu]] + [\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}), [\mu\nu, \mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q})]] \\ &\leq [\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}), \mathcal{L}'_{s,w}({}_1\mu\nu, \mathfrak{Q})] + [\mathcal{L}'_{s,w}(\mathfrak{Q}), \mathcal{L}'_{s,w}({}_1\mu\nu, \mathfrak{Q})] \\ &\quad \text{nach Ind.-Voraussetzung} \end{aligned}$$

$$= \mathcal{L}'_{S,W}(\gamma^{\mu\nu}, \mathcal{Q}).$$

$$(b) [c_1, c_2]r, m] = [c_1, c_2][r, m] + [[c_1, c_2], m]r$$

$$\in \mathcal{L}'_{S,W}(\mathcal{Q})_{\gamma^{\mu\nu}} + \mathcal{L}'_{S,W}(\gamma^{\mu\nu}, \mathcal{Q}) \quad \text{nach (a)}$$

$$= \mathcal{L}'_{S,W}(\gamma^{\mu\nu}, \mathcal{Q}) \quad \text{nach (4.29)}$$

$$(4.31) \mathcal{L}'_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) \text{ für } 0 \leq s_1 \leq s.$$

Beweis:  $\mathcal{L}'_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}) = [\mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\mathcal{Q}), \mathcal{L}'_{S_2, W_2}(\mu, \mathcal{Q})] + [\mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}), \mathcal{L}'_{S_2, W_2}(\mathcal{Q})]$

$$\begin{aligned} &= [\mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\mathcal{Q}), \mu] + \mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) \\ &\subseteq \mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\gamma^{\mu\nu}, \mathcal{Q}) + \mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) \quad \text{nach (4.30)} \\ &= \mathcal{L}'_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

## § 5. Beweis des Hauptsatzes.

$\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{I}$  seien Unterringe eines Ringes  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}$  sei ein Ideal von  $\mathfrak{I}$ .  
 Hat ein Endomorphismus  $\gamma$  von  $\mathfrak{A}$  die Eigenschaft  $t^\gamma = t \bmod \mathfrak{A}$  für jedes  $t$ , so induziert  $\gamma$  nach Definition 2.1 in  $\mathfrak{I}/\mathfrak{A}$  die Identität. Wenn  $\gamma$  in  $\mathfrak{I}/\mathfrak{A}$  die Identität induziert, gilt  $\mathfrak{A}^\gamma \leq \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A} + \mathfrak{I}^\gamma = \mathfrak{I}$ .

Zum Beweis des Hauptsatzes wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 5.1: Induziert der Endomorphismus  $\gamma$  von  $\mathfrak{A}$  die Identität in  $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ ,  
 so induziert  $\gamma$  auch in allen Restklassenringen

$$\mathfrak{A}'_{s,w}(\mathfrak{A})/\mathfrak{A}'_{s,w}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \quad \text{die Identität.}$$

Bemerkung 5.1: Der Beweis wird solange wie möglich ohne die Voraussetzung geführt werden, daß es sich um Restklassenringe halbreiner Kommutatoren handelt. Solange auch werden die Kommutatorideale ohne Striche geschrieben.

Beweis: Induktionsbeginn:  $\gamma$  induziert die Identität in

$$\mathfrak{A}_{0,1}(\mathfrak{A})/\mathfrak{A}_{0,1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}$$

nach Voraussetzung

Induktionsvoraussetzung:  $\gamma$  induziere für  $s_1 < s$  die Identität in

$$\mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A})/\mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \quad .$$

Induktionsschluß:

$$(1) \mathfrak{A}_{s,w}(\mathfrak{A}) = [\mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A}), \mathfrak{A}_{s_2, w_2}(\mathfrak{A})]$$

$$\mathfrak{A}_{s,w}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = [\mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), \mathfrak{A}_{s_2, w_2}(\mathfrak{A})] + [\mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A}), \mathfrak{A}_{s_2, w_2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})]$$

$$\text{Für } c_1 \in \mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A}) \text{ gilt: } c_1^\gamma = c_1 \bmod \mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$$

$$= c_1 + z_1, \text{ wobei } z_1 \in \mathfrak{A}_{s_1, w_1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}),$$

$$\text{für } c_2 \in \mathfrak{A}_{s_2, w_2}(\mathfrak{A}) : c_2^\gamma = c_2 \bmod \mathfrak{A}_{s_2, w_2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$$

$$= c_2 + z_2, \text{ wobei } z_2 \in \mathfrak{A}_{s_2, w_2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}).$$

(2) Nach (4.10) kann jedes Element aus  $\mathfrak{A}_{s,w}(\mathfrak{A})$  als Summe von Elementen der beiden Typen  $[c_1, c_2]$  und  $[c_1, c_2]s$  geschrieben werden.

$$[c_1, c_2]^\gamma = [c_1^\gamma, c_2^\gamma] \quad , \text{ denn } \gamma \text{ ist ein Homomorphismus}$$

$$= c_1 + z_1, c_2 + z_2$$

$$= [c_1, c_2] + [c_1, z_2] + [z_1, c_2] + [z_1, z_2] \quad \text{nach (4.2)}$$

$$= [c_1, c_2] \bmod \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta),$$

$$\text{denn } [c_1, z_2] \in [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\delta), \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mu, \delta)] \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta),$$

$$[z_1, c_2] \in [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \delta), \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\delta)] \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta),$$

$$[z_1, z_2] \in [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \delta), \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mu, \delta)]$$

$$\subseteq [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \delta), \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\delta)] \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta).$$

(3) Es genügt jetzt zu zeigen, daß

$$([c_1, c_2]s)^4 = [c_1, c_2]s \bmod \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta), \text{ oder wegen (2), daß}$$

$$[c_1, c_2]s^4 - [c_1, c_2]s = 0 \bmod \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta), \text{ oder daß}$$

$$[c_1, c_2](s^4 - s) = 0 \bmod \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta).$$

Da  $\eta$  in  $\delta/\mu$  die Identität induziert, gilt  $s^4 - s = 0 \bmod \mu$  oder  $s^4 - s \in \mu$ .

Es braucht also nur mehr bewiesen werden, daß

$\mathcal{L}_{S,W}(\delta) \cdot \mu \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \delta)$ . Nach (4.29) gilt das für halbreine Kommutatorideale.

### Beweis von Satz 3.1 (Hauptsatz):

$$\text{Aus } \delta_1^{q_1} \subseteq \delta_2, \mu_1^{q_1} \subseteq \mu_2, \mu_2^{q_2} \subseteq \mu_1, \delta_2^{q_2} \subseteq \delta_1$$

folgt  $\mathcal{L}_{S,W}^{q_1}(\mu_1, \delta_1) \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mu_2, \delta_2)$ ,  $\mathcal{L}_{S,W}^{q_2}(\mu_2, \delta_2) \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mu_1, \delta_1)$ , denn  $\eta_1, \eta_2$  sind Homomorphismen. Da dasselbe auch für  $\mathcal{L}_{S,W}(\delta_1)$  und  $\mathcal{L}_{S,W}(\delta_2)$  gilt, induzieren  $\eta_1, \eta_2$  Homomorphismen  $\alpha_{s_1}$  von  $\mathcal{L}_{S,W}(\delta_1)/\mathcal{L}_{S,W}(\mu_1, \delta_1)$  in  $\mathcal{L}_{S,W}(\delta_2)/\mathcal{L}_{S,W}(\mu_2, \delta_2)$  und  $\alpha_{s_2}$  von  $\mathcal{L}_{S,W}(\delta_2)/\mathcal{L}_{S,W}(\mu_2, \delta_2)$  in  $\mathcal{L}_{S,W}(\delta_1)/\mathcal{L}_{S,W}(\mu_1, \delta_1)$ .

Da die verbindenden Homomorphismen  $\eta_1, \eta_2$  reziproke Isomorphismen zwischen  $\delta_1/\mu_1$  und  $\delta_2/\mu_2$  induzieren, induziert  $\beta_1 = \eta_1 \eta_2$  in  $\delta_1/\mu_1$  und  $\beta_2 = \eta_2 \eta_1$  in  $\delta_2/\mu_2$  nach Lemma 2.2 die Identität.

Die von  $\beta_1$  und  $\beta_2$  in den Restklassenringen  $\hat{\mathcal{L}}_{S,W}(\delta_1)/\mathcal{L}'_{S,W}(\mu_1, \delta_1)$  bzw.  $\hat{\mathcal{L}}_{S,W}(\delta_2)/\mathcal{L}'_{S,W}(\mu_2, \delta_2)$  nach Lemma 2.1 induzierten Homomorphismen  $\alpha_{s_1} \alpha_{s_2}$  bzw.  $\alpha_{s_2} \alpha_{s_1}$  sind nach Lemma 5.1 die Identität.

$$\varepsilon = \alpha_{s_1} \alpha_{s_2} = \alpha_{s_2} \alpha_{s_1}.$$

Also müssen die durch  $\eta_1$  und  $\eta_2$  induzierten Homomorphismen  $\alpha_{s_1}$  bzw.  $\alpha_{s_2}$  reziproke Isomorphismen sein ( $\alpha_{s_1}^{-1} = \alpha_{s_2}$ ).

Der Hauptsatz wurde aus Lemma 5.1 abgeleitet; umgekehrt folgt Lemma 5.1 aus dem Hauptsatz.

Lemma 5.2: Induziert der Endomorphismus  $\eta$  eines Ringes  $\mathfrak{A}$  die Identität in  $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$  und gilt der Hauptsatz für eine bestimmte Kommutatorform  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ ,

so induziert  $\eta$  in allen Restklassenringen  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$  die Identität.

Beweis:  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$ ;  $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$ ;  $\eta_1 = \eta$ ,  $\eta_2 = \eta$ .

Es gilt  $\mathfrak{A}_1' \subseteq \mathfrak{A}_2$ ,  $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{A}_1' \subseteq \mathfrak{M}_2$ ,  $\mathfrak{A}_2' \subseteq \mathfrak{A}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2 \mathfrak{A}_2' \subseteq \mathfrak{M}_1$ .

$\mathfrak{A}_1/\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{M}_2$  sind als wesentlich gleiche Darstellungen verwandt. Nach dem Hauptsatz induziert  $\eta_1 = \eta$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$  auf  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$  und  $\eta_2 = \eta$  den dazu reziproken Isomorphismus von  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$  auf  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$ .

D.h.  $\eta$  induziert die Identität in  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$ .

Bemerkung 5.2: Satz 3.1 konnte in dieser Arbeit nur für halbreine Kommutatoren bewiesen werden. Im Beweis von Lemma 5.1 (dem Hauptsatz gleichwertig) wurde nämlich in (3) die Formel  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$  benötigt; diese stand nur für halbreine Kommutatorideale zur Verfügung.

Von einer anderen Seite zeigt diese Schwierigkeit

Lemma 5.3: Ist  $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$  eine Darstellung eines freien Ringes  $\bar{\mathfrak{A}}$  und gilt für die Kommutatorideale  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$  der Hauptsatz, so folgt  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{M} = \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$ .

Beweis: Nach Satz 2.5 sind die Darstellungen  $\bar{\mathfrak{A}}/\langle 0 \rangle$  und  $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$  von  $\bar{\mathfrak{A}}$  ähnlich, nach Satz 2.3 verwandt. Daraus folgt nach Lemma 6.7  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{M} + \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A}) = \langle 0 \rangle$ .

$\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$ .

Das übrige ist trivial.

## § 6. Hilfssätze.

Lemma 6.1: Sind  $\mathfrak{I}$  und  $\mathfrak{J}$  Unterringe eines Ringes  $\mathfrak{R}$  und gilt für das

Ideal  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{R}$   $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{I} \cap \mathfrak{J}$ , so folgt

$$[\mathfrak{I}/\mathfrak{M}, \mathfrak{J}/\mathfrak{M}] = [\mathfrak{I}, \mathfrak{J}] + \mathfrak{M}/\mathfrak{M}.$$

Beweis: Die Elemente beider Ideale sind Restklassen aus  $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ .  $[\mathfrak{I}/\mathfrak{M}, \mathfrak{J}/\mathfrak{M}]$

wird nach (4.10) erzeugt von den Restklassen  $[s+\mathfrak{M}, t+\mathfrak{M}]$  und

$(r+\mathfrak{M})[s+\mathfrak{M}, t+\mathfrak{M}]$ . Wegen

$$[s+\mathfrak{M}, t+\mathfrak{M}] = (s+\mathfrak{M})(t+\mathfrak{M}) - (t+\mathfrak{M})(s+\mathfrak{M}) = [s, t] + \mathfrak{M},$$

$$(r+\mathfrak{M})[s+\mathfrak{M}, t+\mathfrak{M}] = (r+\mathfrak{M})([s, t] + \mathfrak{M}) = r[s, t] + \mathfrak{M}$$

sind das genau die Restklassen, die  $[\mathfrak{I}, \mathfrak{J}] + \mathfrak{M}/\mathfrak{M}$  erzeugen.

Lemma 6.2:  $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$  seien Unterringe eines Ringes  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{M}$  sei ein Ideal von

$\mathfrak{R}$  mit  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{I} \cap \mathfrak{J}$ . Aus

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{J}/\mathfrak{M}$$

folgt bekanntlich

$$\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{J}$$

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{M} = \mathfrak{J}/\mathfrak{M}$$

jeweils

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$$

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{M} \subset \mathfrak{J}/\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{I} \subset \mathfrak{J}.$$

Lemma 6.3:  $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{U}$  seien Unterringe eines Ringes  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{M}$  sei ein Ideal

von  $\mathfrak{R}$  mit  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{I} \cap \mathfrak{J} \cap \mathfrak{U}$ . Aus

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{M} \subseteq [\mathfrak{J}/\mathfrak{M}, \mathfrak{U}/\mathfrak{M}]$$

folgt jeweils

$$\mathfrak{I} \subseteq [\mathfrak{J}, \mathfrak{U}] + \mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{M} = [\mathfrak{J}/\mathfrak{M}, \mathfrak{U}/\mathfrak{M}]$$

$$\mathfrak{I} = [\mathfrak{J}, \mathfrak{U}] + \mathfrak{M}.$$

Beweis: Man wende Lemma 6.1 und 6.2 an.

[V.]

---

Lemma 6.4: Sind  $\mathfrak{k}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{n}$  Ideale eines Ringes  $\mathfrak{R}$  mit  $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{k}, \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{d}$ , so

sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

(1)  $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{c} \cap \mathfrak{d}$  und  $\mathfrak{k} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$

(2) die Identität  $\varepsilon$  von  $\mathfrak{R}$  induziert einen Homomorphismus  
von  $\mathfrak{d}/\mathfrak{n}$  auf  $\mathfrak{k}/\mathfrak{c}$

(3)  $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{k}$ ; es existiert ein Homomorphismus  $\beta$  von  $\mathfrak{R}$   
in einen Ring  $\mathfrak{S}$ , ein Ideal  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{R}^\beta$  sowie ein Ideal  $\mathfrak{g}$   
(von  $\mathfrak{R}^\beta$ ) in  $\mathfrak{A}$  derart, daß

$\beta$  einen Isomorphismus von  $\mathfrak{k}/\mathfrak{c}$  auf  $\mathfrak{A}/\mathfrak{g}$  und

einen Homomorphismus von  $\mathfrak{d}/\mathfrak{n}$  auf  $\mathfrak{A}/\mathfrak{g}$  induziert.

Beweis:

(1)  $\rightarrow$  (2):  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{D}} \cong \mathcal{L} + \tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{L} = \mathcal{L}/\mathcal{L}$  nach dem 1. Isomorphiesatz.

Wegen  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{D}}$  kann  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N}$  homomorph auf  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{D}}$  abgebildet werden. Der dadurch bestimmte Homomorphismus von  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{L}$  wird von  $\varepsilon$  induziert, denn  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ .

(2)  $\rightarrow$  (3):  $\mathcal{B} =_{\mathcal{F}} \varepsilon$ ,  $\tilde{\mathcal{D}} =_{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{L} =_{\mathcal{F}} \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{Y} =_{\mathcal{F}} \mathcal{C}$ .

$\mathcal{B}$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{L}/\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$  und einen Homomorphismus von  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{C} = \mathcal{L}/\mathcal{Y}$ .

(3)  $\rightarrow$  (1): (a)  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$  und  $\mathcal{N} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}$ , also  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{D}}$ .

(b) Für jedes  $b$  gilt  $\mathcal{Y} + b^{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}/\mathcal{Y}$ . Da  $\mathcal{B}$  einen Homomorphismus von  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$  induziert, gibt es ein  $d$  mit

$$\mathcal{Y} + b^{\mathcal{B}} = \mathcal{Y} + d^{\mathcal{B}}. \text{ Also existiert ein } p \text{ mit } b^{\mathcal{B}} = p + d^{\mathcal{B}}.$$

Da aus  $\tilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{L}$  andererseits  $b = b_1 + d$  folgt, schließt man  $p + d^{\mathcal{B}} = b^{\mathcal{B}} = (b_1 + d)^{\mathcal{B}} = b_1^{\mathcal{B}} + d^{\mathcal{B}}$ ,  
 $p = b_1^{\mathcal{B}}$ .

$b_1 \in \mathcal{C}$ , denn  $\mathcal{B}$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{L}/\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$ . D.h.  $b = b_1 + d \in \mathcal{C} + \tilde{\mathcal{D}}$ .

Andererseits ist  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{L}$ , also  $\mathcal{C} + \tilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{L}$ .

Lemma 6.5: Sind  $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \tilde{\mathcal{D}}, \mathcal{N}$  Ideale eines Ringes  $\mathcal{D}$  mit  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{N} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}$ , so sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

(1)  $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{D}}$  und  $\mathcal{L} = \mathcal{C} + \tilde{\mathcal{D}}$ ,

(2) die Identität  $\varepsilon$  von  $\mathcal{D}$  induziert einen Isomorphismus von  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{L}$ ,

(3)  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{L}$ ; es existiert ein Homomorphismus  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{D}$  in einen Ring  $\tilde{\mathcal{D}}$ , ein Ideal  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{D}^{\mathcal{B}}$  sowie ein Ideal  $\mathcal{Y}$  (von  $\mathcal{D}^{\mathcal{B}}$ ) in  $\mathcal{L}$  derart, daß  $\mathcal{B}$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{L}/\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$  und einen Isomorphismus von  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{Y}$  induziert.

Beweis:

(1)  $\rightarrow$  (2):  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{L} \cap \tilde{\mathcal{D}} \cong \mathcal{L} + \tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{L} = \mathcal{L}/\mathcal{L}$  nach dem 1. Isomorphiesatz. Dieser Isomorphismus von  $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{L}$  wird von  $\varepsilon$  induziert, denn  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ .

(2)  $\rightarrow$  (3): Analog Lemma 6.4.

(3)  $\rightarrow$  (1): (a) Aus Lemma 6.4 folgt  $\mathcal{B} = \mathcal{C} + \mathcal{D}$  und  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ .

(b)  $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}}$  sei die Menge der Elemente von  $\mathcal{Q}$ , die  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{Y}$  abbildet.

$\mathcal{N}_{\mathcal{Y}}$  ist ein Ideal von  $\mathcal{Q}$ .

Da  $\mathcal{B}$  Isomorphismen von  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  und  $\mathcal{B}/\mathcal{C}$  auf  $\mathcal{Y}/\mathcal{Y}$  induziert, gilt  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{Y}}$  bzw.  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{Y}}$ .

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{Y}} \cap \mathcal{D}$$

Da jedes Element aus  $\mathcal{D}$ , das  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{Y}$  abbildet, in  $\mathcal{N}$  liegt, liegen in  $\mathcal{N}$  alle Elemente von  $\mathcal{D}$ , die zu  $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}}$  gehören.

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{Y}} \cap \mathcal{D}$$

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{Y}} \cap \mathcal{D} = \mathcal{N}$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}.$$

---

Lemma 6.6:  $\mathcal{Q}/\mathcal{N}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  seien verwandte Darstellungen eines Ringes mit den reziproken Isomorphismen  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$ , die von den Homomorphismen  $\gamma$  von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{D}$  bzw.  $\alpha$  von  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{Q}$  induziert werden.  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  seien Unterringe von  $\mathcal{Q}$  bzw.  $\mathcal{D}$  mit

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{B} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{A}^{\gamma} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{B}^{\alpha} \subseteq \mathcal{A}.$$

Dann gilt  $(\mathcal{A}/\mathcal{N})^{\alpha} = \mathcal{B}/\mathcal{N}$ .

Beweis:  $\mathcal{B}/\mathcal{N} = (\mathcal{B}/\mathcal{N})^{\alpha^{-1}\alpha} = (\mathcal{B}^{\alpha} + \mathcal{N}/\mathcal{N})^{\alpha} \subseteq (\mathcal{A}/\mathcal{N})^{\alpha} = \mathcal{A}^{\gamma} + \mathcal{N}/\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}/\mathcal{N}.$

$$\mathcal{B}/\mathcal{N} = (\mathcal{A}/\mathcal{N})^{\alpha}.$$

Lemma 6.7: Sind  $\mathcal{Q}/\mathcal{N}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  verwandte Darstellungen eines Ringes,

gilt für die Kommutatorideale  $\mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  der Hauptsatz und

ist  $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_0, \mathcal{W}_0}^{\prime\prime}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  irgendein (anderes) Kommutatorideal, so

$$\begin{aligned} & \text{ist } (\mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{S}_0, \mathcal{W}_0}^{\prime\prime}(\mathcal{W}, \mathcal{Q})) + \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}) / \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}) \cong \\ & (\mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{S}_0, \mathcal{W}_0}^{\prime\prime}(\mathcal{W}, \mathcal{D})) + \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{D}) / \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Beweis: Um Lemma 6.6 anwenden zu können, muß gezeigt werden:

$$(1) \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}) \subseteq (\mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{S}_0, \mathcal{W}_0}^{\prime\prime}(\mathcal{W}, \mathcal{Q})) + \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}) = \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}); \text{ trivial.}$$

$$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{Q}), \text{ denn } \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{W}, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \mathcal{W}}(\mathcal{Q}) \quad \text{und}$$

$$\mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{L}_{S_0, W_0}''(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q}).$$

$$\text{Ebenso gilt } \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{L}_{S_0, W_0}''(\mu, \mathcal{Q}) + \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}) = \alpha \mathcal{L},$$

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q}).$$

(2) Sind  $\gamma$  und  $\kappa$  verbindende Homomorphismen von  $\mathcal{Q}/\mu$  und  $\mathcal{Q}/\nu$ , so verbinden sie nach Voraussetzung auch die verwandten Darstellungen

$$\mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q})/\mathcal{L}_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q})/\mathcal{L}_{S,W}(\nu, \mathcal{Q}).$$

$$(3) \mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{L}_{S,W}^1(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{L}_{S_0, W_0}''^1(\mu, \mathcal{Q}) + \mathcal{L}_{S,W}^1(\mu, \mathcal{Q})$$

$$\subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{L}_{S_0, W_0}''(\mu, \mathcal{Q}) + \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}) = \mathcal{L}, \text{ denn}$$

$$\mathcal{L}_{S_0, W_0}''^1(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{S_0, W_0}''(\mu, \mathcal{Q}), \quad \mathcal{L}_{S,W}^1(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}),$$

$$\mathcal{L}_{S,W}^1(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q}).$$

Ebenso gilt  $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$ .

(4) Aus Lemma 6.6 folgt die Behauptung.

Lemma 6.8:  $\mu(i)$  sei eine absteigende Kette von Idealen mit  $\mu(0) = \mathcal{Q}$ ,

$\nu(i)$  sei eine absteigende Kette von Idealen mit  $\nu(0) = \mathcal{Q}$ ,

der Homomorphismus  $\gamma$  von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}$  induziere für jedes  $i$  einen Isomorphismus von  $\mu(i-1)/\mu(i)$  in (auf)  $\nu(i-1)/\nu(i)$ .

Dann gilt: (a)  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu(i)$  in (auf)  $\mathcal{Q}/\nu(i)$ ,

(b)  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu(\omega)$  in  $\mathcal{Q}/\nu(\omega)$ ,

$$\text{wobei } \mu(\omega) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu(i), \quad \nu(\omega) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \nu(i).$$

Beweis: (a)  $i=1$ :  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu(1) = \mu(0)/\mu(1)$

in (auf)  $\mathcal{Q}/\nu(1) = \nu(0)/\nu(1)$  nach Voraussetzung.

$i \rightarrow i+1$ :  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu(i)$  in (auf)  $\mathcal{Q}/\nu(i)$

und einen Isomorphismus von  $\mu(i)/\mu(i+1)$  in (auf)  $\nu(i)/\nu(i+1)$ .

Nach Lemma 2.5 (Lemma 2.5) induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu(i+1)$  in (auf)  $\mathcal{Q}/\nu(i+1)$ .

(b)  $\gamma$  induziert einen Homomorphismus, denn aus  $\mu(i)^1 \subseteq \mu(i)$  folgt

$$\mu(\omega)^1 \subseteq \mu(\omega). \text{ Ist weiterhin } r^1 \in \mu(\omega), \text{ so gilt}$$

$$(\mu(i) + r)^1 = \mu(i)^1 + r^1 \subseteq \mu(i) \text{ für alle } i.$$

$\mu(i) + r \subseteq \mu(i)$  für alle  $i$ , denn  $\gamma$  induziert nach (a) einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu(i)$  in  $\mathcal{Q}/\nu(i)$ .

$r^1 \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mu(i) = \mu(\omega)$ , d.h.  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus.

§ 7. Kriterien für die Verwandtschaft oder die  
wesentliche Gleichheit von Darstellungen.

In diesem Paragraphen werden Kriterien angegeben dafür, daß zwei Darstellungen eines Ringes verwandt oder wesentlich gleich sind, auch solche Kriterien, in denen in Umkehrung des Hauptsatzes von der Existenz einiger seiner Invarianten ausgegangen wird.

Als Invarianten des Hauptsatzes kommen nur Restklassenringe halbreiner Kommutatorideale in Frage; sie werden hier ohne Striche geschrieben.

Def. 7.1: Die beiden Idealfolgen  $\omega(i)$ ,  $\omega(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , heißen überlappt, wenn

$$\omega(i+1) \subseteq \omega(i) \subseteq \omega(i+1) \subseteq \omega(i) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots;$$

sie heißen streng überlappt, wenn außerdem  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \omega(i) = \{0\}$ .

Lemma 7.1: Die beiden Folgen reiner Kommutatorideale  ${}_i\omega$ ,  ${}_i\Omega$  überlappen genau dann, wenn  $\omega \subseteq {}^1\Omega$ .

Beweis: (1) Man setze in  ${}_i\omega \subseteq {}_i\omega \subseteq {}^{i+1}\omega \subseteq {}^{i+1}\Omega$   $i = 0$ .

(2)  ${}_i\omega \subseteq {}_i\omega$  und  ${}^{i+1}\Omega \subseteq {}^{i+1}\Omega$  gilt trivialerweise für alle  $i$ .  ${}_i\omega \subseteq {}^{i+1}\Omega$  folgt aus  $\omega \subseteq {}^1\Omega$  nach (4.16) und (4.15).

Lemma 7.2: Überlappen die Folgen  $\tilde{\omega}_{S,W}(\omega, \Omega)$ ,  $\tilde{\omega}_{S,W}(\Omega)$  und ist  $\gamma$  ein verbindender Homomorphismus zweier verwandter Darstellungen  $\Omega/\omega$  und  $\tilde{\omega}/\omega$ ,

so induziert  $\gamma$  Isomorphismen von

$$\tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \Omega) / \tilde{\omega}_{S, W}(\omega, \Omega) \quad \text{in} \quad \tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \tilde{\omega}) / \tilde{\omega}_{S, W}(\omega, \tilde{\omega}).$$

Beweis:  $\tilde{\omega}_{S, W}(\Omega) \cap \tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \Omega) = \tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \Omega)$  nach Voraussetzung,

$$\tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \Omega) + \tilde{\omega}_{S, W}(\omega, \Omega) = \tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \Omega) \quad \text{nach Voraussetzung;}$$

$$\tilde{\omega}_{S, W}(\tilde{\omega}) \cap \tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \tilde{\omega}) \subseteq \tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \tilde{\omega}) \quad \text{trivial,}$$

$$\tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \tilde{\omega}) + \tilde{\omega}_{S, W}(\omega, \tilde{\omega}) = \tilde{\omega}_{S_1, W_1}(\omega, \tilde{\omega}) \quad \text{nach (4.31).}$$

Aus Lemma 6.7 folgt die Behauptung.

Satz 7.1: Überlappen die Folgen  $\tilde{\omega}_{S, W}(\omega, \Omega)$ ,  $\tilde{\omega}_{S, W}(\Omega)$  streng und ist  $\gamma$  ein verbindender Homomorphismus zweier verwandter Darstellungen  $\Omega/\omega$  und  $\tilde{\omega}/\omega$ ,

so ist  $\gamma$  ein Isomorphismus von  $\Omega$  in  $\tilde{\omega}$ .

Beweis: Nach Lemma 7.2 induziert  $\gamma$  Isomorphismen von

$\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathcal{U}, \mathcal{Q}) / \mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$  in  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathcal{U}, \mathcal{Q}) / \mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$ . Nach Lemma 6.8 induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q} / \mathcal{L}_W(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$  in  $\mathcal{Q} / \mathcal{L}_W(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$ . Da nach Voraussetzung  $\mathcal{L}_W(\mathcal{U}, \mathcal{Q}) = (0)$ , induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}$ ; d.h.  $\gamma$  ist ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}$ .

Satz 7.2:  $\gamma, \alpha$  seien verbindende Homomorphismen zweier Darstellungen  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  und  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  eines Ringes. Existieren streng überlappende

Kommutatorfolgen  $\mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{U}, \mathcal{Q}), \mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{Q})$ , so gilt

(a)  $\gamma$  und  $\gamma^*$  sind Isomorphismen von  $\mathcal{Q}$ ,

(b)  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{U} = (0)$ , wenn  $\mathcal{U}$  der Kern von  $\alpha$  ist.

Beweis: (a)  $\gamma^*$  ist nach Lemma 2.2 ein verbindender Homomorphismus der beiden verwandten Darstellungen  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  und  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$ . Nach Satz 7.1 sind  $\gamma$  und  $\gamma^*$  Isomorphismen.

(b) Also ist  $\alpha$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{U}$  in  $\mathcal{Q}$ , d.h.  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{U} = (0)$ .

Bemerkung 7.1: Die Darstellungen  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  ( $\mathcal{U} \neq \mathcal{Q}$ ) und  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}/\mathcal{U}$  eines freien Ringes sind nach Satz 2.5 ähnlich. Die reinen Kommutatoren  $i_1(\mathcal{U}/\mathcal{U}), i_1(\mathcal{Q}/\mathcal{U})$  überlappen streng, denn  $(0) \subseteq (0) \subseteq i_1(\mathcal{Q}/\mathcal{U}) \subseteq i_1(\mathcal{Q}/\mathcal{U})$ . Die reinen Kommutatoren  $i_1\mathcal{U}, i_1\mathcal{Q}$  aber überlappen wegen  $\mathcal{U} \neq \mathcal{Q}$  nach Lemma 7.1 nicht.

Korollar 7.1: Existieren streng überlappende Kommutatorfolgen

$\mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{U}, \mathcal{Q}), \mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{Q})$ , so sind die Darstellungen  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  und  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  eines Ringes genau dann verwandt, wenn

ein Unterring  $\mathcal{T}$  von  $\mathcal{Q}$  existiert derart, daß  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  und  $\mathcal{T}/\mathcal{T} \cap \mathcal{U}$  wesentlich gleich und  $\mathcal{T}/\mathcal{T} \cap \mathcal{U}$  und  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  verwandt sind.

Beweis: (1) Wesentlich gleiche Darstellungen sind verwandt; aus der Transitivität der Verwandtschaft (Satz 2.1) folgt die Behauptung.

(2)  $\gamma$  sei ein verbindender Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  und  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$ . Nach Satz 7.2 ist  $\gamma$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{T} = \mathcal{T} \cap \mathcal{U}$ . D.h.  $\mathcal{Q}/\mathcal{U}$  und  $\mathcal{T}/\mathcal{T} \cap \mathcal{U}$  sind wesentlich gleich.

Aus der Transitivität der Verwandtschaft folgt das übrige.

Korollar 7.2: Ist ein Ring  $\mathfrak{D}$  verwandt mit jedem seiner Unterringe und ist  $\mathfrak{Q}$  ein Ring mit streng überlappten Kommutatorfolgen  $\mathfrak{I}_{s,w}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}), \mathfrak{I}_{s,w}(\mathfrak{Q})$ , so sind zwei isomorphe Darstellungen  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$  genau dann verwandt, wenn  $\mathfrak{Q}$  und ein Unterring von  $\mathfrak{D}$  isomorph sind.

Beweis: (1) Nach Satz 7.2 gilt  $\mathfrak{Q} \cong \mathfrak{Q}^{\eta} \subseteq \mathfrak{D}$ , wenn  $\eta$  ein verbindender Homomorphismus ist.

(2) Ist  $\mathfrak{Q} \cong \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{D}$ , so ist auch  $\mathfrak{w} \cong \mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{T}$ .  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{T}/\mathfrak{x}$  sind wesentlich gleich. Wegen der Transitivität der Verwandtschaft sind  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$  verwandt.

Satz 7.3:  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$  seien Darstellungen eines Ringes  $\mathfrak{T}$ ,

$\mathfrak{I}_{s,w}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}), \mathfrak{I}_{s,w}(\mathfrak{Q})$  seien streng überlappte Kommutatorfolgen und  $\eta$  sei ein Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{D}$ .

Dann gibt es einen Homomorphismus  $\kappa$  von  $\mathfrak{D}$  auf  $\mathfrak{Q}$  mit  $\mathfrak{Q}^{\eta\kappa} = \mathfrak{Q}$ , der zusammen mit  $\eta$  reziproke Isomorphismen zwischen  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$  induziert genau dann, wenn

(1)  $\eta$  eine wesentliche Gleichheit von  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  auf  $\mathfrak{Q}^{\eta}/\mathfrak{w} \cap \mathfrak{Q}^{\eta}$  induziert,

(2) ein idempotenter Endomorphismus  $\varepsilon$  von  $\mathfrak{D}$  auf  $\mathfrak{Q}^{\eta}$  existiert, der einen Isomorphismus von  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$  auf  $\mathfrak{Q}^{\eta}/\mathfrak{w} \cap \mathfrak{Q}^{\eta}$  induziert.

Beweis: (I) (a)  $\mathfrak{n}$  sei der Kern von  $\varepsilon$ .  $s^{\varepsilon} = s + s'$ .

$$s^{\varepsilon} = s(\varepsilon^2) = s^{\varepsilon} + s'^{\varepsilon}$$

$s'^{\varepsilon} = 0$ ,  $s' \in \mathfrak{n}$ . D.h.  $\varepsilon$  induziert in  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$  und wegen  $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{w}$  nach (2) auch in  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$  die Identität.

(b)  $\eta$  induziert einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  in  $\mathfrak{D}/\mathfrak{w}$ , weil  $\mathfrak{w}^{\eta} \subseteq \mathfrak{w}$  nach (1);  $\eta$  induziert einen Isomorphismus, denn aus  $r^{\eta} \in \mathfrak{w}$  folgt  $r^{\eta} \in \mathfrak{w} \cap \mathfrak{Q}^{\eta}$  und daraus nach (1)  $r \in \mathfrak{w}$ .

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{\varepsilon} + \mathfrak{w} \text{ nach (a)}$$

$$= \mathfrak{Q}^{\eta} + \mathfrak{w} \text{ nach (2).}$$

D.h.  $\eta$  induziert einen Isomorphismus „auf“.

(c)  $\gamma$  ist nach (1) ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}^1$ . Also ist  $\alpha = \gamma \circ \gamma^{-1}$  ein Homomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}$ , denn  $\varepsilon$  ist ein Endomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}^1 = \mathcal{Q}$ . Wegen

$$\alpha \gamma^{-1} \leq (\alpha \cap \mathcal{Q}^1) \gamma^{-1} = (\alpha \cap 1) \gamma^{-1} = \alpha \cap \gamma \text{ nach (2) und (1)}$$

induziert  $\alpha$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\omega$  in  $\mathcal{Q}/\omega$ .

Der von  $\alpha \gamma = \varepsilon$  in  $\mathcal{Q}/\omega$  nach Lemma 2.1 induzierte Homomorphismus ist nach (a) die Identität. Auf Grund von (b) induzieren  $\alpha$  und  $\gamma$  nun reziproke Isomorphismen.

$$(d) \mathcal{Q}^{\alpha} = \mathcal{Q}^{\gamma \varepsilon \gamma^{-1}} = \mathcal{Q}^{\varepsilon \gamma^{-1}} = \mathcal{Q}^{\varepsilon \gamma^{-1}} = \mathcal{Q}^{\gamma \gamma^{-1}} = \mathcal{Q}.$$

(II) (a) Nach Satz 7.2 ist  $\gamma$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}^1$  und der Homomorphismus  $\alpha$  von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}$  ist ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}^1$  auf  $\mathcal{Q}$ , d.h.  $\mathcal{Q}^1 \cap \omega = (0)$ , wenn  $\omega$  der Kern von  $\alpha$  ist.

$\alpha^* = \gamma$  der zu  $\alpha$  (dem Isomorphismus von  $\mathcal{Q}^1$  auf  $\mathcal{Q}$ ) reziproke Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}^1$ .

Dann gilt  $\alpha^* \alpha = 1$ , wenn 1 die Identität ist.

$$(b) \varepsilon \alpha: s \mapsto s^{\alpha \alpha^*}.$$

(c)  $\varepsilon$  ist ein Endomorphismus von  $\mathcal{Q}$  mit  $\mathcal{Q}^{\varepsilon} = \mathcal{Q}^1$ . Da  $\alpha^*$  kernlos ist, ist  $\omega$  der Kern von  $\varepsilon$ .  $\varepsilon$  ist idempotent, denn  $s(\varepsilon^2) = s^{\alpha \alpha^* \alpha \alpha^*} = s^{\alpha 1 \alpha^*} = s^{\alpha \alpha^*} = s^{\varepsilon}$  nach (a).

(d) Da  $\alpha$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\omega$  in  $\mathcal{Q}/\omega$  induziert, ist  $\omega \leq \alpha$ . D.h.  $\varepsilon$  induziert sogar in  $\mathcal{Q}/\omega$  die Identität; nach (I, a) induziert nämlich  $\varepsilon$  die Identität in  $\mathcal{Q}/\omega$ . Daraus folgt, daß  $\varepsilon$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\omega$  auf  $\mathcal{Q}^1/\omega \cap \mathcal{Q}^1$  induziert, denn es gilt nach (c) außerdem  $\mathcal{Q}^{\varepsilon} = \mathcal{Q}^1$  und  $\omega^{\varepsilon} \leq \omega \cap \mathcal{Q}^{\varepsilon} = \omega \cap \mathcal{Q}^1$ .

(e)  $\omega^1 = \omega \cap \mathcal{Q}^1$ , weil  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\omega$  in  $\mathcal{Q}/\omega$  induziert. Da  $\gamma$  nach (a) ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}^1$  ist, induziert  $\gamma$  eine wesentliche Gleichheit von  $\mathcal{Q}/\omega$  auf  $\mathcal{Q}^1/\omega \cap \mathcal{Q}^1$ .

Bemerkung 7.2: In (I) wurde die Voraussetzung des strengen Überlappteins nicht genraucht.

Def. 7.2: Ein Ring heiße S-Ring, wenn er zu keinem echten Unterring von sich isomorph ist.

Korollar 7.3: Sind  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  zwei Darstellungen eines Ringes, überlappen die Kommutatorfolgen  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{M}, \mathcal{Q}), \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q})$  streng und ist  $\mathcal{Q}$  ein S-Ring, so ist  $\gamma$  ein verbindender Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  genau dann, wenn (1) und (2) von Satz 7.3 erfüllt sind.

Beweis: (1)  $\gamma$  induziere mit einem zugehörigen Homomorphismus  $\alpha$  von  $\mathcal{D}$  in  $\mathcal{Q}$  reziproke Isomorphismen zwischen  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ . Nach Satz 7.2 ist  $\gamma\alpha$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}$ . Da  $\mathcal{Q}$  ein S-Ring ist, gilt  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\gamma\alpha}$ , d.h.  $\alpha$  ist ein Homomorphismus von  $\mathcal{D}$  auf  $\mathcal{Q}$ . Damit sind (1) und (2) von Satz 7.3 erfüllt.

(2) trivial.

Korollar 7.4: Sind  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  verwandte Darstellungen eines Ringes, überlappen  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{M}, \mathcal{Q}), \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{Q}), \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{N}, \mathcal{D}), \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{D})$  jeweils streng und ist  $\mathcal{Q}$  oder  $\mathcal{D}$  ein S-Ring, so sind  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  wesentlich gleich.

Beweis:  $\mathcal{Q}$  sei ein S-Ring.

Nach Korollar 7.3 induziert ein verbindender Homomorphismus  $\gamma$  von  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  eine wesentliche Gleichheit zwischen  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{Q}^{\gamma}/\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}^{\gamma}$  und es existiert ein idempotenter Endomorphismus  $\varepsilon$  von  $\mathcal{D}$  auf  $\mathcal{Q}^{\gamma}$ , der einen Isomorphismus von  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{Q}^{\gamma}/\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}^{\gamma}$  induziert. Der dazu reziproke Isomorphismus wird auf Grund von (II,d) von Satz 7.3 von der Identität des Ringes  $\mathcal{D}$  induziert.

$\varepsilon$  ist also ein verbindender Homomorphismus der Darstellungen  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  und  $\mathcal{Q}^{\gamma}/\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}^{\gamma}$ . Nach Satz 7.2, (a) ist  $\varepsilon$  ein Monomorphismus von  $\mathcal{D}$ . Außerdem gilt  $\mathcal{M}^{\varepsilon} = \mathcal{M} \cap \mathcal{Q}^{\gamma} = \mathcal{M} \cap \mathcal{Q}^{\gamma}$ , weil  $\mathcal{M}$  alle Elemente von  $\mathcal{D}$  enthält, die in  $\mathcal{M} \cap \mathcal{D}^2$  abgebildet werden. D.h.  $\varepsilon$  induziert eine wesentliche Gleichheit von  $\mathcal{D}/\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{Q}^{\gamma}/\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}^{\gamma}$ .

Aus der Transitivität der wesentlichen Gleichheit folgt die Behauptung.

---

Def. 7.3: Ein Ring heiße Q-Ring, wenn  $\mathfrak{w} = (0)$  sein einziges Ideal ist mit  $\mathfrak{Q} \cong \mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$ .

Satz 7.4: Die Kommutatorfolgen  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})$ ,  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{Q})$  seien streng überlappt und  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})$  seien Q-Ringe;  
 $\mathfrak{w} \subseteq \mathfrak{w}$  sei ein Ideal von  $\mathfrak{Q}$ ,

$$\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}/\mathfrak{w}, \quad \mathfrak{w}^* = \mathfrak{w}/\mathfrak{w}.$$

Dann sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

- (1)  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{Q}^*/\mathfrak{w}^*$  sind verwandt,
- (2)  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) \cong \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{Q}^*, \mathfrak{w}^*)/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*)$
- (3)  $\mathfrak{w} = (0)$ .

Beweis:  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*) = \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w}.$

$$s=0: \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*) = \mathfrak{w}^* = \mathfrak{w}/\mathfrak{w} = \mathfrak{w} + \mathfrak{w}/\mathfrak{w} = \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w}.$$

$$\begin{aligned} s: \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*) &= [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*), \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{Q}^*)] + [\mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*), \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{Q}^*)] \\ &= [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w}, \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w}] + [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w}, \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w}] \\ &= [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}, \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}] + [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}, \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}] \\ &\quad \text{nach Lemma 6.1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}), \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{Q})] + [\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{Q}), \mathcal{L}_{S_2, W_2}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})] + \mathfrak{w}/\mathfrak{w} \\ &= \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w}. \end{aligned}$$

Die Kommutatorfolgen  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*)$ ,  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{Q}^*)$  berlappen, denn

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*) &= \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w} \subseteq \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w} = \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*), \\ \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*) &= \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w} \subseteq \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w} = \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{Q}^*). \end{aligned}$$

(3)  $\rightarrow$  (1):  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{Q}^*/\mathfrak{w}^*$  sind wesentlich gleich, also verwandt.

(1)  $\rightarrow$  (2): Man setze  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}''(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) = \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})$  und wende Lemma 6.7 an.

$$\begin{aligned} (2) \rightarrow (3): \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) &\cong \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*)/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}^*, \mathfrak{Q}^*) \\ &\cong \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}/\mathfrak{w} / \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w} \text{ nach dem 2. Isomorphiesatz} \\ &= \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w} / \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w} \\ &\cong \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) / \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) \cap (\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}) \end{aligned}$$

nach dem 1. Isomorphiesatz.

Da  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})/\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q})$  ein Q-Ring ist und

$$\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) \cap (\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}), \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) &= \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) \cap (\mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathfrak{w}) = \\ &= \mathcal{L}_{S,W}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) + \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathfrak{w}, \mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{w}, \text{ (Dedekindsches Gesetz).} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) \cap \mathcal{W} \in \mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q})$$

$$\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) \cap \mathcal{W} \in \mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}) \cap \mathcal{W}$$

$$\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}) \cap \mathcal{W}, \text{ weil } \mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}) \in \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}).$$

$$\mathcal{W} \in \mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}), \text{ denn } \mathcal{W} \in \mu = \mathcal{L}_{0, 1}(\mu, \mathcal{Q}) \text{ und aus}$$

$$\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{W} = \mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}) \cap \mathcal{W} \text{ folgt } \mathcal{W} \in \mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}).$$

Da die Kommutatorfolgen streng überlappen, gilt  $\mathcal{W} = (0)$ .

Korollar 7.5:  $\mathcal{Q}/\mu$  und  $\mathcal{Q}'/\mu'$  seien Darstellungen eines Ringes, die

Kommutatorfolgen  $\mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}), \mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{Q})$  seien streng

überlappt,  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q})/\mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q})$  seien  $\mathbb{Q}$ -Ringe und

der Homomorphismus  $\gamma$  von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}'$  induziere einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu$  auf  $\mathcal{Q}'/\mu'$ .

Dann sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

(1)  $\mathcal{Q}/\mu$  und  $\mathcal{Q}'/\mu'$  sind verwandt,

(2)  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q})/\mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}) \cong \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu', \mathcal{Q}')/\mathcal{L}_{S, W}(\mu', \mathcal{Q}'), s \geq 1$

(3)  $\gamma$  induziert eine wesentliche Gleichheit von  $\mathcal{Q}/\mu$  auf  $\mathcal{Q}'/\mu'$ .

Beweis: Sei der Kern von  $\gamma$ . Da  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mu$  in  $\mathcal{Q}'/\mu'$  induziert, gilt  $\mathcal{W} \in \mu, \mathcal{Q}' = \mathcal{Q}, \mu' \in \mu, \mu' = \mu$ , denn  $\gamma$  ist ein Homomorphismus von  $\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}'$ .

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'/\mu', \mu' = \mathcal{Q} \cap \mu'/\mathcal{Q}'.$$

$\gamma'$  sei der Isomorphismus von  $\mathcal{Q}'$  auf  $\mathcal{Q}'$ , der von  $\gamma$  induziert wird.

$\gamma'$  induziert eine wesentliche Gleichheit von  $\mathcal{Q}'/\mu'$ , denn  $\gamma'$  ist ein Isomorphismus von  $\mu'$  auf  $\mu$ , weil  $\mu' = \mu$ .

D.h. (1) ist gleichwertig mit der Verwandtschaft von  $\mathcal{Q}/\mu$  und

$$\mathcal{Q}'/\mu',$$

(2) ist gleichwertig mit der Isomorphie für alle  $s \geq 1$  von

$$\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q})/\mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}) \text{ und } \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu', \mathcal{Q}')/\mathcal{L}_{S, W}(\mu', \mathcal{Q}'),$$

(3) ist gleichwertig mit  $\mathcal{W} = (0)$ .

Aus Satz 7.4 folgt die Behauptung.

Satz 7.5:  $\mathcal{Q}/\mu$  und  $\mathcal{Q}'/\mu'$  seien Darstellungen eines Ringes, die Kommu-

tatorfolgen  $\mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q}), \mathcal{L}_{S, W}(\mathcal{Q})$  seien streng überlappt,

$\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q})/\mathcal{L}_{S, W}(\mu, \mathcal{Q})$  seien  $\mathbb{Q}$ -Ringe und  $\gamma$  sei ein Homo-

morphismus von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{V}$ , der einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\sim$  auf  $\mathcal{V}/\sim$  induziert.

Dann existiert ein Homomorphismus  $\alpha$  von  $\mathcal{V}$  auf  $\mathcal{Q}$  mit  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\alpha}$ , der zusammen mit  $\gamma$  reziproke Isomorphismen zwischen  $\mathcal{Q}/\sim$  und  $\mathcal{V}/\sim$  induziert genau dann, wenn

- $$(1) \mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mu, \mathcal{Q}) / \mathcal{L}_{s, w}(\mu, \mathcal{Q}) \cong \mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mu, \mathcal{V}) \cap \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{V}) + \mathcal{L}_{s, w}(\mu, \mathcal{V}) / \mathcal{L}_{s, w}(\mu, \mathcal{V}), \quad s \geq 1,$$
- (2) ein idempotenter Endomorphismus  $\varepsilon$  von  $\mathcal{V}$  auf  $\mathcal{Q}^{\gamma}$  existiert, der einen Meromorphismus von  $\mathcal{V}/\sim$  induziert.

Beweis: (I) Aus Satz 7.3 folgt (2), und (1) folgt aus Lemma 6.7, wenn man  $\mathcal{L}_{s_0, w_0}(\mu, \mathcal{V}) = \mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mu, \mathcal{V})$  setzt.

(II) (a)  $\mathcal{L} = \mathcal{V}^{\mathcal{Q}^{\gamma}}$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{V} \cap \mathcal{L}$ ,  $\pi$  sei der Kern von  $\varepsilon$ . Dann gilt  $\mathcal{V}^{\varepsilon} = \mathcal{L}$  und  $\pi \subseteq \sim$ , denn  $\varepsilon$  induziert einen Meromorphismus von  $\mathcal{V}/\sim$ .

Nach (I, a) des Beweises von Satz 7.3 induziert  $\varepsilon$  in  $\mathcal{V}/\sim$  die Identität und daher auch einen Isomorphismus von  $\mathcal{V}/\sim$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{P} = \mathcal{V}^{\varepsilon}/\sim \cap \mathcal{L}^{\varepsilon}$ ; der dazu reziproke Isomorphismus wird aus demselben Grund von der Identität von  $\mathcal{V}$  induziert. D.h.  $\varepsilon$  ist ein verbindender Homomorphismus von  $\mathcal{V}/\sim$  und  $\mathcal{L}/\mathcal{P}$ .

Aus Lemma 6.7 folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mu, \mathcal{V}) \cap \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{V}) + \mathcal{L}_{s, w}(\mu, \mathcal{V}) / \mathcal{L}_{s, w}(\mu, \mathcal{V}) &\cong \\ &\cong \mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{P}, \mathcal{L}) / \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{P}, \mathcal{L}). \end{aligned}$$

$$(b) \mathcal{L}_{s, w}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q}) = \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{P}, \mathcal{L}).$$

$s=0$ :  $\mathcal{L}_{0, 1}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q}) = \mu^{\gamma} = \mu \cap \mathcal{Q}^{\gamma} = \mathcal{L}_{0, 1}(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ , denn  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\sim$  in  $\mathcal{V}/\sim$ .

$$\mathcal{L}_{0, 1}^{\gamma}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^{\gamma} = \mathcal{L} = \mathcal{L}_{0, 1}(\mathcal{L}) \text{ nach Definition.}$$

$$\begin{aligned} s: \mathcal{L}_{s, w}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q}) &= \\ &= [\mathcal{L}_{s_1, w_1}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q}), \mathcal{L}_{s_2, w_2}^{\gamma}(\mathcal{Q})] + [\mathcal{L}_{s_1, w_1}^{\gamma}(\mathcal{Q}), \mathcal{L}_{s_2, w_2}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q})] \\ &= [\mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mathcal{P}, \mathcal{L}), \mathcal{L}_{s_2, w_2}(\mathcal{L})] + [\mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mathcal{L}), \mathcal{L}_{s_2, w_2}(\mathcal{P}, \mathcal{L})] \\ &= \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{P}, \mathcal{L}). \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{s, w}^{\gamma}(\mathcal{Q}) = [\mathcal{L}_{s_1, w_1}^{\gamma}(\mathcal{Q}), \mathcal{L}_{s_2, w_2}^{\gamma}(\mathcal{Q})] = \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{L}).$$

(c) Aus  $\mathcal{L}_{s, w}(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mu, \mathcal{Q})$  folgt  $\mathcal{L}_{s, w}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{s_1, w_1}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q})$ ,

aus  $\mathcal{L}_{s_1, w_1}(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{s, w}(\mathcal{Q})$  folgt  $\mathcal{L}_{s_1, w_1}^{\gamma}(\mu, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{L}_{s, w}^{\gamma}(\mathcal{Q})$ .

D.h. die Kommutatorfolgen  $\mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{P}, \mathcal{L}), \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{L})$  sind über-  
 lappt. Also gilt  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathcal{P}, \mathcal{L}) / \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{P}, \mathcal{L}) =$   
 $= \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{P}, \mathcal{L}) / \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{P}, \mathcal{L})$  .  
 (d)  $\mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mu, \mathcal{Q}) / \mathcal{L}_{S,W}(\mu, \mathcal{Q}) \cong \mathcal{L}_{S_1, W_1}(\mathcal{P}, \mathcal{L}) / \mathcal{L}_{S,W}(\mathcal{P}, \mathcal{L})$  für  $s \geq 1$   
 nach (1) und (a).  $\gamma$  induziert auch einen Isomorphismus von  
 $\mathcal{Q}/\mu$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{P}$  , denn  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  
 $\mathcal{Q}/\mu$  auf  $\mathcal{Q}/\nu$  .

Nach Korollar 7.5 induziert  $\gamma$  eine wesentliche Gleichheit  
 von  $\mathcal{Q}/\mu$  auf  $\mathcal{L}/\mathcal{P}$  .

Aus Satz 7.3 folgt nun die Behauptung.

## § 8. Die Potenz eines Ringes.

Def. 8.1: Die Potenz  $P(\mathfrak{Q})$  ist das Ideal eines Ringes, welches von seinen Idealen  $\mathfrak{u}$  mit  $\mathfrak{u} = {}_1\mathfrak{u}$  erzeugt wird.

(8.1) Für jeden Automorphismus  $\beta$  von  $\mathfrak{Q}$  gilt  $P(\mathfrak{Q})^\beta \subseteq P(\mathfrak{Q})$ .

Beweis: Ist  $\mathfrak{u}$  ein  $P(\mathfrak{Q})$  erzeugendes Ideal, so gilt

$$\mathfrak{u}^\beta = {}_1\mathfrak{u}^\beta = [\mathfrak{u}^\beta, \mathfrak{u}^\beta] = [\mathfrak{u}^\beta, \mathfrak{Q}].$$

$$\mathfrak{u}^\beta \subseteq P(\mathfrak{Q}), \text{ d.h. } P(\mathfrak{Q})^\beta \subseteq P(\mathfrak{Q}).$$

(8.2)  $P(\mathfrak{Q}) \subseteq {}^1\mathfrak{Q}$ , denn alle Ideale  $\mathfrak{u}$  liegen in  ${}^1\mathfrak{Q}$ .

(8.3)  $P(\mathfrak{Q}) = {}_1P(\mathfrak{Q})$ , denn

es gilt trivialerweise  $P(\mathfrak{Q}) \supseteq {}_1P(\mathfrak{Q})$  und andererseits liegen nach

(4.16) alle Ideale  $\mathfrak{u} = {}_1\mathfrak{u}$  in  ${}_1P(\mathfrak{Q})$ .

Bemerkung 8.1:  $\mathfrak{u}\mathfrak{v} = {}_1\mathfrak{u}\mathfrak{v}$  gilt nicht für alle Ideale  $\mathfrak{u}\mathfrak{v} \subseteq P(\mathfrak{Q})$ . Siehe Beispiel 10.1, (10.6).

$$(8.4) P(\mathfrak{Q}/P(\mathfrak{Q})) = (0)$$

Beweis:  $P(\mathfrak{Q}/P(\mathfrak{Q}))$  wird erzeugt von den Idealen  $\mathfrak{u}/P(\mathfrak{Q}) = [\mathfrak{u}/P(\mathfrak{Q}), \mathfrak{u}/P(\mathfrak{Q})]$  von  $\mathfrak{Q}/P(\mathfrak{Q})$ ; dabei ist  $\mathfrak{u}$  ein Ideal von  $\mathfrak{Q}$ .  $\mathfrak{u} = [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] + P(\mathfrak{Q})$  nach Lemma 6.3.  ${}_1\mathfrak{u} = {}_2\mathfrak{u} + {}_1P(\mathfrak{Q}) = {}_2\mathfrak{u} + P(\mathfrak{Q})$ .

$$\mathfrak{u} = {}_1\mathfrak{u} + P(\mathfrak{Q}) = {}_2\mathfrak{u} + P(\mathfrak{Q}) + P(\mathfrak{Q}) = {}_1\mathfrak{u}$$

$$\mathfrak{u} \subseteq P(\mathfrak{Q})$$

$$\mathfrak{u}/P(\mathfrak{Q}) = (0).$$

Def. 8.2:  $P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$  ist das eindeutig bestimmte Ideal des Ringes  $\mathfrak{Q}$ , welches das Ideal  $\mathfrak{u}$  von  $\mathfrak{Q}$  enthält und für das gilt

$$P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})/\mathfrak{u} = P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{u}).$$

$$\text{Lemma 8.1: } {}_iP(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) = {}_i\mathfrak{u} + {}_{i+1}P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$$

Beweis:  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{u}) = [\mathfrak{Q}/\mathfrak{u}, P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{u})] = [\mathfrak{Q}/\mathfrak{u}, P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})/\mathfrak{u}]$  nach (8.3) und Def. 8.2

$$P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) = {}_1P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) + \mathfrak{u} \text{ nach Lemma 6.3}$$

$${}_iP(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) = {}_{i+1}P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) + {}_i\mathfrak{u} \text{ nach (4.17) und (4.15).}$$

Satz 8.1: Ist  $\mathfrak{u}$  ein Ideal von  $\mathfrak{Q}$ , so folgt

$${}_i\mathfrak{u} \subseteq {}_iP(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) \text{ und}$$

$${}_iP(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})/{}_i\mathfrak{u} = P(\mathfrak{Q}/{}_i\mathfrak{u}) \quad \text{für } i \geq 0.$$

Beweis: (1) Aus  $\mathfrak{u} \subseteq P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$  und (4.15) folgt  ${}_i P(\mathfrak{u}) \subseteq {}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$ .

(2)  $i=0$ :  ${}_0 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_0 \mathfrak{u} = P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / \mathfrak{u} = P(\mathfrak{Q} / \mathfrak{u}) = P(\mathfrak{Q} / {}_0 \mathfrak{u})$ .

$i=1$ : Def.:  $\mathfrak{u} = {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$ .

(a) Zuerst soll gezeigt werden, daß  $\mathfrak{u} \subseteq {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$ .

Setzt man  ${}_1 \mathfrak{u} = \mathfrak{u}''$ , so wird  $\mathfrak{u} = P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}'')$  und aus Lemma 8.1 folgt für  $i=0$

$$\mathfrak{u} = {}_1 \mathfrak{u} + {}_1 \mathfrak{u}'' = {}_1 (\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'')$$

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'' / \mathfrak{u} = \mathfrak{u}'' + [\mathfrak{Q}, \mathfrak{u} + \mathfrak{u}''] / \mathfrak{u}'' = [\mathfrak{Q} / \mathfrak{u}, \mathfrak{u} + \mathfrak{u}'' / \mathfrak{u}] \text{ nach Lemma 6.1}$$

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'' / \mathfrak{u} \subseteq P(\mathfrak{Q} / \mathfrak{u}) = P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / \mathfrak{u}$$

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'' \subseteq P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) \text{ nach Lemma 6.2}$$

$$\mathfrak{u} \subseteq P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}), \text{ also } {}_1 \mathfrak{u} \subseteq {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) \text{ nach (4.16)}$$

$$\mathfrak{u} = {}_1 \mathfrak{u} + {}_1 \mathfrak{u}'' \subseteq {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) + {}_1 \mathfrak{u}'' = {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) \text{ nach (1).}$$

(b) Nun soll gezeigt werden, daß  $\mathfrak{u} \supseteq {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$ .

Aus Lemma 8.1 ergibt sich für  $i=1$

$${}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) = {}_1 \mathfrak{u} + {}_2 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$$

$${}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_1 \mathfrak{u} = {}_1 \mathfrak{u}'' + {}_2 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_1 \mathfrak{u}'' = [\mathfrak{Q} / {}_1 \mathfrak{u}, {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_1 \mathfrak{u}'] \text{ nach Lem-}$$

$${}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_1 \mathfrak{u} \subseteq P(\mathfrak{Q} / {}_1 \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}'' / {}_1 \mathfrak{u}'' \quad \text{ma 6.1}$$

$${}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{u} \text{ nach Lemma 6.2}$$

(c)  $\mathfrak{u} = {}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})$

$${}_1 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_1 \mathfrak{u} = P(\mathfrak{Q} / {}_1 \mathfrak{u}).$$

$i$ : Es gelte bereits  ${}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_i \mathfrak{u} = P(\mathfrak{Q} / {}_i \mathfrak{u})$ . Wegen  $P(\mathfrak{Q} / {}_i \mathfrak{u}) =$

$$= P(\mathfrak{Q}, {}_i \mathfrak{u}) / {}_i \mathfrak{u} \text{ folgt daraus nach Lemma 6.2: } P(\mathfrak{Q}, {}_i \mathfrak{u}) = {}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}).$$

$i+1$ :  ${}_{i+1} P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) / {}_{i+1} \mathfrak{u} = {}_1 ({}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u})) / {}_1 ({}_i \mathfrak{u}) = {}_1 P(\mathfrak{Q}, {}_i \mathfrak{u}) / {}_1 ({}_i \mathfrak{u})$  nach

Induktionsvoraussetzung

$$= P(\mathfrak{Q} / {}_1 ({}_i \mathfrak{u})) \text{ nach Induktionsbeginn}$$

$$= P(\mathfrak{Q} / {}_{i+1} \mathfrak{u}).$$

Bemerkung 8.2: In der Induktionsvoraussetzung wurde gezeigt, daß

$$P(\mathfrak{Q}, {}_i \mathfrak{u}) = {}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{u}) \text{ für alle } i.$$

(8.5)  $P(\mathfrak{Q})$  ist der Durchschnitt aller Ideale  $\mathfrak{u}$  von  $\mathfrak{Q}$  mit  $P(\mathfrak{Q} / \mathfrak{u}) = (0)$ .

Beweis: Es sei  $\mathfrak{u}$  ein Ideal mit  $P(\mathfrak{Q} / \mathfrak{u}) = (0)$ .

$$[\mathfrak{Q} / \mathfrak{u}, \mathfrak{u} + P(\mathfrak{Q})] / \mathfrak{u} = [\mathfrak{Q}, \mathfrak{u} + P(\mathfrak{Q})] + \mathfrak{u} / \mathfrak{u} \text{ nach Lemma 6.1}$$

$$= [\mathfrak{Q}, P(\mathfrak{Q})] + \mathfrak{u} / \mathfrak{u} \quad \text{denn } {}_1 \mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}$$

$$= P(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{m}/\mathfrak{m} \quad \text{nach (8.3).}$$

$$P(\mathfrak{Q}) + \mathfrak{m}/\mathfrak{m} \subseteq P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}) = (0)$$

$$P(\mathfrak{Q}) \subseteq \mathfrak{m}.$$

$P(\mathfrak{Q})$  liegt also im Durchschnitt dieser Ideale. Da  $P(\mathfrak{Q})$  nach (8.4) selbst zu diesen Idealen gehört, ist  $P(\mathfrak{Q})$  gleich dem Durchschnitt.

(8.6) Ein Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $\mathfrak{Q}$  ist die Potenz  $P(\mathfrak{Q})$  genau dann, wenn  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^n$  und  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}) = (0)$ .

Beweis: (I) Aus (8.2) folgt  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^n$  und aus (8.4) folgt  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}) = (0)$ .

(II) Aus  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^n$  ergibt sich  $\mathfrak{m} \subseteq P(\mathfrak{Q})$  und  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}) = (0)$  liefert mit (8.5)  $P(\mathfrak{Q}) \subseteq \mathfrak{m}$ .

(8.7)  $P(\mathfrak{Q}) \subseteq \mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})$  für jedes Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $\mathfrak{Q}$  und für alle  $i$ .

Beweis:  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})) \cong P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})/\mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})) = P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}))$  nach Satz 8.1  
 $= (0)$  nach (8.4).

$$P(\mathfrak{Q}) \subseteq \mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) \quad \text{nach (8.5).}$$

Lemma 8.2: Die folgenden Eigenschaften eines Ideals  $\mathfrak{m}$  von  $\mathfrak{Q}$  sind gleichwertig:

(1)  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i) = (0)$  für alle  $i$ .

(2) Es existiert ein  $i$  mit  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i) = (0)$ .

(3) Es existiert ein  $i$  mit  $\mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$ .

Beweis: (1)  $\rightarrow$  (2): trivial.

(2)  $\rightarrow$  (3):  $(0) = P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i) = \mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})/\mathfrak{m}_i$  nach Satz 8.1. D.h.  $\mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}_i$ .

(3)  $\rightarrow$  (1): Aus Lemma 8.1 ergibt sich  $\mathfrak{m}_{i-1} P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_{i-1} \mathfrak{m} + \mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$ ,  
 .....  
 $\mathfrak{m}_0 P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) = P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$ .

Satz 8.1 liefert  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i) = \mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})/\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}_i = (0)$ .

Lemma 8.2 ist ein Spezialfall von

(8.8) Je zwei der Ideale  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , sind genau dann isomorph, wenn  $\mathfrak{m}_{i+1} \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}_{i+1} P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})$  für alle  $i$ .

Beweis:  $P(\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}_i) = \mathfrak{m}_i P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})/\mathfrak{m}_i$  nach Satz 8.1

$$= \mathfrak{m}_i \mathfrak{m} + \mathfrak{m}_{i+1} P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})/\mathfrak{m}_i \quad \text{nach Lemma 8.1}$$

$$\cong \mathfrak{m}_{i+1} P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m})/\mathfrak{m}_{i+1} P(\mathfrak{Q}, \mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m}_i \mathfrak{m} \quad \text{nach dem 1. Isomorphiesatz}$$

$$\cong i_{+1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W}) / i_{+1}\mathcal{W} \Big/ i_{+1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W}) \cap i_{+1}\mathcal{W} / i_{+1}\mathcal{W}$$

nach dem 2. Isomorphiesatz

$$= P(\mathcal{Q} / i_{+1}\mathcal{W}) \Big/ i_{+1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W}) \cap i_{+1}\mathcal{W} / i_{+1}\mathcal{W} \text{ nach Satz 8.1.}$$

D.h.  $P(\mathcal{Q} / i_{+1}\mathcal{W}) \cong P(\mathcal{Q} / i_{+1}\mathcal{W})$  genau dann, wenn  $i_{+1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W}) \cap i_{+1}\mathcal{W} / i_{+1}\mathcal{W} = (0)$   
oder genau dann, wenn  $i_{+1}\mathcal{W} = i_{+1}\mathcal{W} \cap i_{+1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$ .

Bemerkung 8.3: Das gilt nicht immer, denn sonst müßte nach (8.7)  
 $i_{+1}\mathcal{W} \cong i_{+1}\mathcal{W} \cap P(\mathcal{Q})$  für alle  $i$  erfüllt sein, was nach Beispiel 10.2,  
(10.7) für  $i = 0$  sicher nicht der Fall ist.

## § 9. Beziehungen zwischen Invarianten.

Es soll gezeigt werden, daß unter gewissen Voraussetzungen einige der Invarianten von § 3.2 andere bestimmen.

Satz 9.1:  $\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{n}$  seien Ideale der Ringe  $\mathfrak{Q}$  bzw.  $\mathfrak{D}$ ,

der Homomorphismus  $\beta$  von  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{D}$  induziere

(1) einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{m}$  auf  $\mathfrak{D}/\mathfrak{n}$ ,

(2) einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/1\mathfrak{Q}$  auf  $\mathfrak{D}/1\mathfrak{D}$ ,

(3) einen Homomorphismus von  $i^{-1}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}$  auf  $i^{-1}\mathfrak{n}/\mathfrak{n}$  für ein festes  $i$ .

Dann induziert  $\beta$  für  $j \geq i$  einen Homomorphismus von  $j^{-1}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}$  auf  $j^{-1}\mathfrak{n}/\mathfrak{n}$ .

Beweis: (a) Aus den Voraussetzungen folgt

$$(1) \mathfrak{m}^\beta \subseteq \mathfrak{n}, \mathfrak{D} = \mathfrak{Q}^\beta + \mathfrak{n}$$

$$(2) 1\mathfrak{Q}^\beta \subseteq 1\mathfrak{D}, \mathfrak{D} = \mathfrak{Q}^\beta + 1\mathfrak{D}$$

$$(3) i\mathfrak{m}^\beta \subseteq i\mathfrak{n}, i^{-1}\mathfrak{n} = i^{-1}\mathfrak{m}^\beta + i\mathfrak{n}$$

$$(b) i+1\mathfrak{m}^\beta = [\mathfrak{Q}, i\mathfrak{m}^\beta]^\beta = [\mathfrak{Q}^\beta, i\mathfrak{m}^\beta] \subseteq [1\mathfrak{D}, i\mathfrak{n}] = i+1\mathfrak{n} \text{ nach (3).}$$

$\beta$  induziert daher einen Homomorphismus von  $i\mathfrak{m}/i+1\mathfrak{m}$  in  $i\mathfrak{n}/i+1\mathfrak{n}$ .

$$\begin{aligned} (c) i\mathfrak{n} &= [1\mathfrak{D}, i\mathfrak{n}] = [1\mathfrak{D}, i\mathfrak{m}^\beta + i\mathfrak{n}] && \text{nach (3)} \\ &= [1\mathfrak{D}, i\mathfrak{m}^\beta] + [1\mathfrak{D}, i\mathfrak{n}] && \text{nach (4.12)} \\ &= [\mathfrak{Q}^\beta + \mathfrak{n}, i\mathfrak{m}^\beta] + i+1\mathfrak{n} && \text{nach (1)} \\ &= [\mathfrak{Q}, i\mathfrak{m}^\beta]^\beta + [\mathfrak{n}, i\mathfrak{m}^\beta] + i+1\mathfrak{n} \\ &\subseteq i\mathfrak{m}^\beta + i+1\mathfrak{n} + [1\mathfrak{D} + \mathfrak{Q}^\beta, i\mathfrak{m}^\beta] && \text{nach (2)} \\ &= i\mathfrak{m}^\beta + i+1\mathfrak{n} + [1\mathfrak{D}, i\mathfrak{m}^\beta] + [\mathfrak{Q}, i\mathfrak{m}^\beta]^\beta \\ &\subseteq i\mathfrak{m}^\beta + i+1\mathfrak{n} + [1\mathfrak{D}, i\mathfrak{n}] + i\mathfrak{m}^\beta && \text{nach (3)} \\ &= i\mathfrak{m}^\beta + i+1\mathfrak{n} && \text{nach (4.24).} \end{aligned}$$

Also induziert  $\beta$  einen Homomorphismus „auf“.

Korollar 9.1: Induziert der Homomorphismus  $\beta$  von  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{D}$  einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/1\mathfrak{Q}$  auf  $\mathfrak{D}/1\mathfrak{D}$ , so induziert  $\beta$  für jedes  $i \geq 0$  Homomorphismen von  $i\mathfrak{Q}/i+1\mathfrak{Q}$  auf  $i\mathfrak{D}/i+1\mathfrak{D}$  und von  $\mathfrak{Q}/i\mathfrak{Q}$  auf  $\mathfrak{D}/i\mathfrak{D}$ .

Beweis:  $i = 0$ : trivial.

$i \geq 1$ : (a)  $\mathfrak{w} = \mathfrak{r}\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{w} = \mathfrak{r}\mathfrak{I}$ . Man wende Satz 9.1 an.

(b) Man benutze Lemma 2.4.

Satz 9.2:  $\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{w}$  seien Ideale der Ringe  $\mathfrak{Q}$  bzw.  $\mathfrak{I}$ , der Homomorphismus  $\beta$  von  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{I}$  induziere einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  auf  $\mathfrak{I}/\mathfrak{w}$ . Dann induziert  $\beta$  für jedes  $i \geq 0$  einen Homomorphismus von  $i\mathfrak{Q}/i\mathfrak{w}$  auf  $i\mathfrak{I}/i\mathfrak{w}$ .

Beweis  $i=0$ : Voraussetzung.

$i=1$  —  $i$ : (a)  $\mathfrak{w}^\beta \subseteq \mathfrak{w}$ ,  $\mathfrak{I} = \mathfrak{Q}^\beta + \mathfrak{w}$ ,  $i-1\mathfrak{w}^\beta \subseteq i-1\mathfrak{w}$ ,  $i-1\mathfrak{I} = i-1\mathfrak{Q}^\beta + i-1\mathfrak{w}$

auf Grund der Induktionsvoraussetzung. Wegen

$$i\mathfrak{w}^\beta = [\mathfrak{Q}, i-1\mathfrak{w}]^\beta = [\mathfrak{Q}^\beta, i-1\mathfrak{w}^\beta] \subseteq [\mathfrak{I}, i-1\mathfrak{w}] = i\mathfrak{w} \text{ und}$$

$$i\mathfrak{I}^\beta = [\mathfrak{Q}, i-1\mathfrak{I}]^\beta = [\mathfrak{Q}^\beta, i-1\mathfrak{I}^\beta] \subseteq [\mathfrak{I}, i-1\mathfrak{I}] = i\mathfrak{I}$$

induziert  $\beta$  einen Homomorphismus von  $i\mathfrak{Q}/i\mathfrak{w}$  in  $i\mathfrak{I}/i\mathfrak{w}$ .

(b) Es ist nur mehr  $i\mathfrak{I} \subseteq i\mathfrak{Q}^\beta + i\mathfrak{w}$  zu zeigen.

$$i\mathfrak{I} = [\mathfrak{I}, i-1\mathfrak{I}] = [\mathfrak{I}, i-1\mathfrak{Q}^\beta + i-1\mathfrak{w}] \text{ nach (a)}$$

$$= [\mathfrak{I}, i-1\mathfrak{Q}^\beta] + [\mathfrak{I}, i-1\mathfrak{w}] \text{ nach (4.12)}$$

$$= [\mathfrak{Q}^\beta + \mathfrak{w}, i-1\mathfrak{Q}^\beta] + i\mathfrak{w} \text{ nach (a)}$$

$$= [\mathfrak{Q}, i-1\mathfrak{Q}]^\beta + [\mathfrak{w}, i-1\mathfrak{Q}^\beta] + i\mathfrak{w}$$

$$\subseteq i\mathfrak{Q}^\beta + i\mathfrak{w} + [\mathfrak{w}, i-1\mathfrak{I}] \text{ nach (a)}$$

$$= i\mathfrak{Q}^\beta + i\mathfrak{w} \text{ nach (4.24).}$$

Korollar 9.2:  $\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{w}$  seien Ideale der Ringe  $\mathfrak{Q}$  bzw.  $\mathfrak{I}$ , der Homomorphismus  $\beta$  von  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{I}$  induziere einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{w}$  auf  $\mathfrak{I}/\mathfrak{w}$  und von  $\mathfrak{Q}/1\mathfrak{Q}$  auf  $\mathfrak{I}/1\mathfrak{I}$ .

Dann induziert  $\beta$  für jedes  $i \geq 0$  einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/i\mathfrak{w}$  auf  $\mathfrak{I}/i\mathfrak{w}$ .

Beweis:  $\beta$  induziert Homomorphismen von  $\mathfrak{Q}/i\mathfrak{Q}$  auf  $\mathfrak{I}/i\mathfrak{I}$  und von  $i\mathfrak{Q}/i\mathfrak{w}$  auf  $i\mathfrak{I}/i\mathfrak{w}$  nach Korollar 9.1 bzw. Satz 9.2. Das liefert mit Lemma 2.4 die Behauptung.

Bemerkung 9.1:  $\mathfrak{Q}$  sei die freie Summe zweier kommutativer Ringe

$\mathfrak{T}_1 \neq (0) \neq \mathfrak{T}_2$  und  $\beta$  sei der Endomorphismus von  $\mathfrak{Q}$ , der jedes Element  $(0, t_2)$  auf Null abbildet und jedes Element  $(t_1, 0)$  fest läßt;  $\beta$  induziert in  $\mathfrak{Q}/(0, \mathfrak{T}_2)$  die Identität. Da  $\mathfrak{Q}$  kommutativ ist, gilt

$$\mathfrak{Q}/[\mathfrak{Q}, (0, \mathfrak{T}_2)] = \mathfrak{Q}/(0) = \mathfrak{Q}, \text{ also } (\mathfrak{Q}/[\mathfrak{Q}, (0, \mathfrak{T}_2)])^\beta = (\mathfrak{T}_1, 0) \neq \mathfrak{Q}/[\mathfrak{Q}, (0, \mathfrak{T}_2)]$$

Setzt man nun  $\mathfrak{Q} = {}_1\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{w} = \mathfrak{w} = {}_1\mathfrak{T}_2$ , so ist die erste Voraussetzung von Korollar 9.2 erfüllt, die Behauptung für  $i = 1$  aber nicht. Es fehlt die zweite Voraussetzung des Korollars, denn  $(\mathfrak{Q}/1\mathfrak{Q})^B = (\mathfrak{Q}/(0))^B = \mathfrak{Q}^B = (\mathfrak{T}_1, 0) \neq \mathfrak{Q}/1\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}$ .

D.h. in Korollar 9.2 ist die zweite Voraussetzung notwendig.

Satz 9.3: Ist  $\mathfrak{w}$  ein Ideal des Ringes  $\mathfrak{Q}$  und induziert der Endomorphismus  $B$  von  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{Q}/1\mathfrak{Q}$  und in  ${}_1\mathfrak{w}/{}_{i+1}\mathfrak{w}$  die Identität, so gilt:

(1)  $B$  induziert die Identität in  ${}_1\mathfrak{w}/{}_{i+2}\mathfrak{w}$ ,

(2)  $B$  induziert die Identität in  ${}_1\mathfrak{w}/{}_{i+1}\mathfrak{w}$  vorausgesetzt, daß

$${}_1\mathfrak{w}^B \subseteq {}_1\mathfrak{w} \text{ und } {}_1\mathfrak{w} = {}_{i+1}\mathfrak{w} + \mathfrak{Q}.$$

Beweis: (1) Nach Voraussetzung ist  $r^B = r + 1r$  und  ${}_1m^B = {}_1m + {}_{i+1}m$ .

$$[r, {}_1m]^B = [r^B, {}_1m^B] = [r + 1r, {}_1m + {}_{i+1}m]$$

$$= [r + 1r, {}_1m] \bmod {}_{i+2}\mathfrak{w} \text{ nach (4.2) und (4.24)}$$

$$= [r, {}_1m] \bmod {}_{i+2}\mathfrak{w} \text{ nach (4.2) und (4.24).}$$

$$(r_1[r_2, {}_1m])^B = r_1^B[r_2, {}_1m]^B = (r_1 + 1r_1)[r_2, {}_1m] \bmod {}_{i+2}\mathfrak{w}$$

$$= r_1[r_2, {}_1m] \bmod {}_{i+2}\mathfrak{w}, \text{ denn } 1\mathfrak{Q}[\mathfrak{Q}, {}_1\mathfrak{w}] \subseteq {}_{i+2}\mathfrak{w} \text{ nach (4.23).}$$

Da nach (4.10) jedes Element von  ${}_1\mathfrak{w}$  als Summe von Elementen dieser beiden Typen geschrieben werden kann, induziert  $B$  in  ${}_1\mathfrak{w}/{}_{i+2}\mathfrak{w}$  die Identität.

(2) Es gilt  $r^B = r + 1r$  und  ${}_{i-1}m^B = {}_{i-1}m + {}_{i-1}m'$ , denn  ${}_{i-1}\mathfrak{w}^B \subseteq {}_{i-1}\mathfrak{w}$ .

Aus  $[\mathfrak{Q}, {}_{i-1}\mathfrak{w}] = {}_1\mathfrak{w}$  folgt nach Voraussetzung

$$[r, {}_{i-1}m] = [r, {}_{i-1}m]^B \bmod {}_{i+1}\mathfrak{w} = [r^B, {}_{i-1}m^B] \bmod {}_{i+1}\mathfrak{w}$$

$$= [r + 1r, {}_{i-1}m + {}_{i-1}m'] \bmod {}_{i+1}\mathfrak{w}$$

$$= [r, {}_{i-1}m + {}_{i-1}m'] \bmod {}_{i+1}\mathfrak{w} \text{ nach (4.2) und (4.24)}$$

$$= [r, {}_{i-1}m] + [r, {}_{i-1}m'] \bmod {}_{i+1}\mathfrak{w}.$$

Da dies für alle  $r$  gilt, folgt  $[\mathfrak{Q}, {}_{i-1}m'] \subseteq {}_{i+1}\mathfrak{w}$ .

$${}_{i-1}m' \in {}_{i+1}\mathfrak{w} + \mathfrak{Q} = {}_1\mathfrak{w}, \text{ d.h.}$$

$${}_{i-1}m^B = {}_{i-1}m \bmod {}_1\mathfrak{w};$$

$B$  induziert in  ${}_1\mathfrak{w}/{}_{i+1}\mathfrak{w}$  die Identität.

Korollar 9.3: (1)  $\mathfrak{w}$  und  $\mathfrak{w}$  seien Ideale der Ringe  $\mathfrak{Q}$  bzw.  $\mathfrak{Q}$ ,

(2)  $B$  und  $\times$  seien Homomorphismen von  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{Q}$ , bzw.  $\mathfrak{Q}$  in

$$\mathfrak{Q} \text{ mit } \mathfrak{w}^B \subseteq \mathfrak{w}, \mathfrak{w}^\times \subseteq \mathfrak{w}.$$

(3)  $\beta$  und  $\star$  induzieren reziproke Isomorphismen zwischen

$$\mathcal{Q}/1\mathcal{Q} \text{ und } \mathfrak{D}/1\mathfrak{D} \text{ sowie zwischen } i^{w}/_{i+1w} \text{ und } i^{w}/_{i+1w}.$$

Dann gilt: (a)  $\beta$  und  $\star$  induzieren reziproke Isomorphismen zwischen

$$i+1^{w}/_{i+2w} \text{ und } i+1^{w}/_{i+2w},$$

(b)  $\beta$  und  $\star$  induzieren reziproke Isomorphismen zwischen

$$i-1^{w}/_{i-1w} \text{ und } i-1^{w}/_{i-1w} \text{ vorausgesetzt, da\ss}$$

$$i^{w} = i+1^{w} + \mathcal{Q} \text{ und } i^{w} = i+1^{w} + \mathfrak{D}.$$

Beweis: (1) Aus  $w^{\beta} \in w$  folgt  $(j^{w})^{\beta} = j^{(w\beta)} \in j^{w} \cdot \beta$  induziert daher

für alle  $j \geq 1$  einen Homomorphismus von  $j-1^{w}/_{jw}$  in  $j-1^{w}/_{jw}$ . Eben-

so induziert  $\star$  einen Homomorphismus von  $j-1^{w}/_{jw}$  in  $j-1^{w}/_{jw}$ .

(2)  $\beta \star$  ist ein Endomorphismus von  $\mathcal{Q}$ . Aus (3) und Lemma 2.2 folgt,

da\ss  $\beta \star$  in  $\mathcal{Q}/1\mathcal{Q}$  und in  $i^{w}/_{i+1w}$  die Identität induziert.

Nach Satz 9.3, dessen Voraussetzungen damit erfüllt sind, gilt

(a)  $\beta \star$  induziert die Identität in  $i+1^{w}/_{i+2w}$ ,

(b)  $\beta \star$  induziert die Identität in  $i-1^{w}/_{i-1w}$  vorausgesetzt, da\ss

$$i-1^{w\beta\star} \in i-1^{w} \text{ und } i^{w} = i+1^{w} + \mathcal{Q}.$$

Aus (2) folgt  $w^{\beta\star} \in w$  und damit  $i-1^{w\beta\star} \in i-1^{w}$ .

Genau so erhält man, da\ss

(a)  $\star \beta$  die Identität in  $i+1^{w}/_{i+2w}$  induziert,

(b)  $\star \beta$  die Identität in  $i-1^{w}/_{i-1w}$  induziert vorausgesetzt, da\ss

$$i^{w} = i+1^{w} + \mathfrak{D}.$$

(3)  $\beta$  und  $\star$  müssen also reziproke Isomorphismen zwischen  $i+1^{w}/_{i+2w}$

und  $i+1^{w}/_{i+2w}$  induzieren. Ebenso folgt die Behauptung (b) des

Korollars.

---

Von jetzt an werde in diesem Paragraphen folgendes vorausgesetzt:

(V)  $w$  und  $w$  seien Ideale zweier verwandter Ringe  $\mathcal{Q}$  bzw.  $\mathfrak{D}$ :  $\mathfrak{D}$  sei

selbstähnlich und  $w \in 1\mathcal{Q}$ .  $\gamma$  sei ein Homomorphismus von  $\mathcal{Q}$  in  $\mathfrak{D}$ ,

der einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/w$  auf  $\mathfrak{D}/w$  induziert; dessen Kern

sei  $^{w}/w$ .

Lemma 9.1:  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $^{w}/w$  auf  $\mathfrak{D}/w$ .

Beweis: Da  $^{w}/w$  Kern von  $\gamma$  ist, gilt  $w^{\gamma} \in w$ . D.h.  $\gamma$  induziert einen

Homomorphismus von  $\mathcal{R}/\mathcal{W}$  in  $\mathcal{S}/\mathcal{W}$ ; sogar einen Isomorphismus, denn sein Kern ist  $\mathcal{W}/\mathcal{W} = (0)$ . Außerdem ist jede Restklasse  $\mathcal{W} + \mathcal{s}$  Bild einer Restklasse  $\mathcal{W} + \mathcal{r}$ , also auch Bild einer Restklasse  $\mathcal{W} + \mathcal{r}$ .

Lemma 9.2:  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{R}/1\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{S}/\mathcal{W} + 1\mathcal{S}$  genau dann, wenn  $\mathcal{W} \subseteq 1\mathcal{R}$ .

Beweis: (1) (a) Wegen  $1\mathcal{R}^4 = [\mathcal{R}, \mathcal{R}]^4 = [\mathcal{R}^4, \mathcal{R}^4] \subseteq [\mathcal{S}, \mathcal{S}] = 1\mathcal{S} \subseteq \mathcal{W} + 1\mathcal{S}$  induziert  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{R}/1\mathcal{R}$  in  $\mathcal{S}/\mathcal{W} + 1\mathcal{S}$ .

(b) Zu  $\mathcal{W} + 1\mathcal{S} = \mathcal{W} + f(\mathcal{S}_1)$  existieren, da  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{R}/\mathcal{W}$  „auf“  $\mathcal{S}/\mathcal{W}$  induziert,  $\mathcal{r}_1$  mit

$$(\mathcal{W} + \mathcal{r}_1)^4 \subseteq \mathcal{W} + \mathcal{S}_1,$$

$$(\mathcal{W} + f(\mathcal{r}_1))^4 \subseteq \mathcal{W} + f(\mathcal{S}_1).$$

Zu jedem  $n + 1\mathcal{S}$  gibt es also ein  $1\mathcal{r} = f(\mathcal{r}_1)$  mit  $(1\mathcal{r})^4 = 1\mathcal{S} \bmod \mathcal{W}$ .

(c)  $1\mathcal{R} + \mathcal{r}$  liege im Kern des in (a) gefundenen Homomorphismus.

$\mathcal{r}^4 \in \mathcal{W} + 1\mathcal{S}$ . Nach (b) gibt es ein  $1\mathcal{r}$  mit

$$1\mathcal{r}^4 = \mathcal{r}^4 \bmod \mathcal{W}.$$

$$(1\mathcal{r} - \mathcal{r})^4 = 0 \bmod \mathcal{W}$$

$$1\mathcal{r} - \mathcal{r} \in \mathcal{W} \subseteq 1\mathcal{R}, \text{ also } \mathcal{r} \in 1\mathcal{R}.$$

D.h.  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{R}/1\mathcal{R}$  in  $\mathcal{S}/\mathcal{W} + 1\mathcal{S}$ .

(d) Ist  $\mathcal{W} + 1\mathcal{S} + \mathcal{s}$  eine Restklasse von  $\mathcal{S}/\mathcal{W} + 1\mathcal{S}$ , so enthält sie die Restklasse  $\mathcal{W} + \mathcal{s}$  von  $\mathcal{S}/\mathcal{W}$ , die ein Urbild  $\mathcal{W} + \mathcal{r}$  aus  $\mathcal{R}/\mathcal{W}$  besitzt.  $\mathcal{W} + \mathcal{r} \subseteq 1\mathcal{R} + \mathcal{r}$ .  $(1\mathcal{R} + \mathcal{r})^4 \subseteq \mathcal{W} + 1\mathcal{S} + \mathcal{s}$ .

$\gamma$  induziert damit einen Isomorphismus „auf“.

(2) Für jedes  $w$  gilt  $w^4 \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W} + 1\mathcal{S}$ , d.h.  $w \in 1\mathcal{R}$ .

Satz 9.4: Induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{R}/1\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{S}/\mathcal{W} + 1\mathcal{S}$ , so gilt: (a)  $\gamma$  induziert für  $i \geq 1$  einen Isomorphismus von

$$i^{-1}\mathcal{W}/i\mathcal{W} \text{ auf } i^{-1}\mathcal{W} + i\mathcal{S}/i\mathcal{W}.$$

(b)  $\gamma$  induziert für  $i \geq 0$  Homomorphismen von  $\mathcal{R}/i\mathcal{W}$  in  $\mathcal{S}/i\mathcal{W}$  und von  $i\mathcal{R}/i\mathcal{W}$  auf  $i\mathcal{S}/i\mathcal{W}$ ; ihr Kern ist  $i\mathcal{W}/i\mathcal{W}$ .

(c)  $\gamma$  induziert einen Homomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{W}/i\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{W} + i\mathcal{S}/i\mathcal{W}$  genau dann, wenn  $i^{-1}\mathcal{W} = i^{-1}\mathcal{W} + i\mathcal{S}$ .

(d) Induziert  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{W}/i\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{W} + i\mathcal{S}/i\mathcal{W}$ , so ist  $i^{-1}\mathcal{W} \subseteq i^{-1}\mathcal{P}(\mathcal{R}, \mathcal{W})$  und  $\gamma$  indu-

ziert einen Homomorphismus von  $i^w /_{i+1} w$  auf  $i^w \wedge i+1 \delta /_{i+1} w$ .

(e)  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $i-1^w /_{i-1} w$  auf  $i-1^w \wedge i \delta /_{i-1} w$  genau dann, wenn die Identität  $\varepsilon$  von  $\mathcal{Q}$  einen Isomorphismus von  $i^{\mathcal{Q}} /_{i-1} w$  auf  $i-1^{\mathcal{Q}} /_{i-1} w$  induziert.

Beweis: (a) Nach Lemma 9.1 induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus  $\gamma''$  von  $\mathcal{Q} /_{i-1} w$  auf  $\delta /_{i-1} w$ . Nach Lemma 2.9 existiert ein Homomorphismus von  $\delta$  in  $\mathcal{Q}$ , der  $\gamma''^{-1}$  induziert. Auf Grund des Hauptsatzes induziert nun  $\gamma$  für  $i \geq 0$  einen Isomorphismus von  $i \mathcal{Q} /_{i-1} w$  auf  $i \delta /_{i-1} w$  und nach Lemma 6.7 einen Isomorphismus von  $i \mathcal{Q} \wedge i-1^{\mathcal{Q}} + i^{\mathcal{Q}} /_{i-1} w$  auf  $i \delta \wedge i-1^w + i^w /_{i-1} w$ ,  $i \geq 1$ . Außerdem gilt nach Lemma 9.2 und (4.16) für  $i \geq 1$ :

$$\mathcal{Q} \subseteq 1 \mathcal{Q}, i-1^{\mathcal{Q}} \subseteq i \mathcal{Q}, \text{ d.h. } i \mathcal{Q} \wedge i-1^{\mathcal{Q}} = i-1^{\mathcal{Q}}.$$

$\gamma$  induziert daher einen Isomorphismus von  $i-1^{\mathcal{Q}} /_{i-1} w$  auf  $i \delta \wedge i-1^w /_{i-1} w$ .

(b)  $i^w \subseteq w$ ,  $i^w \subseteq i^w$ ,  $i \mathcal{Q} \subseteq i \delta$ .

D.h.  $\gamma$  induziert Homomorphismen von  $\mathcal{Q} /_{i-1} w$  in  $\delta /_{i-1} w$  und von  $i \mathcal{Q} /_{i-1} w$  in  $i \delta /_{i-1} w$ . Da nach (a)  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $i \mathcal{Q} /_{i-1} w$  auf  $i \delta /_{i-1} w$  induziert, ist jede Restklasse  $i^w + i \mathcal{Q}$  Bild einer Restklasse  $i \mathcal{Q} + i r \subseteq i^w + i r$ .  $\gamma$  induziert also einen Homomorphismus von  $i \mathcal{Q} /_{i-1} w$  auf  $i \delta /_{i-1} w$ .

Der Kern der beiden induzierten Homomorphismen enthält  $i^{\mathcal{Q}} /_{i-1} w$ , denn  $i^{\mathcal{Q}} \subseteq i^w$ .

Aus (V) folgt, daß  $\mathcal{Q} /_{i-1} w$  und  $\delta /_{i-1} w + 1 \delta$  verwandt sind und aus Lemma 2.9, daß  $\gamma$  einer der verbindenden Homomorphismen ist. Nach dem Hauptsatz induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $i \mathcal{Q} /_{i+1} w$  auf  $i \delta /_{i+1} (w + 1 \delta) = i \delta /_{i+1} w + i+1 \delta$ .

Außerdem induziert  $\gamma$  wegen  $i \mathcal{Q} \subseteq i \delta$  für  $i \geq 0$  einen Homomorphismus von  $i \mathcal{Q} /_{i+1} w$  in  $i \delta /_{i+1} w$ . Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus, weil - wie eben gezeigt -  $i+1 \mathcal{Q}$  genau die Elemente aus  $i \mathcal{Q}$  umfaßt, die  $\gamma$  auf  $i^w + i+1 \delta \subseteq i+1 \delta$  abbildet.

Setzt man  $w(i) = i \mathcal{Q}$ ,  $w(i) = i \delta$ , so folgt daraus nach Lemma 6.8, daß  $\gamma$  für  $i \geq 0$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q} /_{i-1} w$  in  $\delta /_{i-1} w$  induziert.

Da  $\eta$  nach (a) einen Isomorphismus von  $i\mathcal{Q}/i\mathcal{P}^1$  auf  $i\mathcal{Q}/i\mathcal{W}$  induziert, ergibt sich daraus mittels Lemma 2.5, daß  $\eta$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/i\mathcal{P}^1$  in  $\mathcal{Q}/i\mathcal{W}$  induziert.

D.h.  $i\mathcal{P}^1$  enthält alle Elemente von  $\mathcal{Q}$  mit  $r^1 \in i\mathcal{W}$ .

$$(c) \quad \dot{\iota} = \eta_{i-1\mathcal{P}^1}, \quad \varepsilon = \eta_{i\mathcal{P}^1}, \quad \zeta = \eta_{i-1\mathcal{W}}, \quad \nu = \eta_{i\mathcal{W}}; \quad \dagger = \eta_{i-1\mathcal{W} \cap i\mathcal{Q}}, \\ \eta = \eta_{i\mathcal{W}}.$$

(1) Wegen (a) sind die Voraussetzungen von Lemma 6.4, (3) erfüllt und es folgt (1), nämlich  $i-1\mathcal{P}^1 = i-1\mathcal{W} + i\mathcal{P}^1$ .

(2) Aus Lemma 6.4, (1) folgt (2): die Identität  $\varepsilon$  von  $\mathcal{Q}$  induziert einen Homomorphismus von  $i-1\mathcal{W}/i\mathcal{W}$  auf  $i-1\mathcal{Q}/i\mathcal{P}^1$ ; nach (a) und Lemma 2.1 induziert  $\varepsilon\eta = \eta$  einen Homomorphismus von  $i-1\mathcal{W}/i\mathcal{W}$  auf  $i-1\mathcal{W} \cap i\mathcal{Q}/i\mathcal{W}$ .

(d) (1) Aus der Voraussetzung und (c) folgt

$$\begin{aligned} i-1\mathcal{P}^1 &= i-1\mathcal{W} + i\mathcal{P}^1 \\ i-1\mathcal{P}^1/i-1\mathcal{W} &= i-1\mathcal{W} + i\mathcal{P}^1/i-1\mathcal{W} = i-1\mathcal{W} + [i-1\mathcal{P}^1, \mathcal{Q}]/i-1\mathcal{W} \\ &= [i-1\mathcal{P}^1/i-1\mathcal{W}, \mathcal{Q}/i-1\mathcal{W}] && \text{nach Lemma 6.1} \\ i-1\mathcal{P}^1/i-1\mathcal{W} &\subseteq P(\mathcal{Q}/i-1\mathcal{W}) = i-1P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})/i-1\mathcal{W} && \text{nach Satz 3.1} \\ i-1\mathcal{P}^1 &\subseteq i-1P(\mathcal{Q}, \mathcal{W}) && \text{nach Lemma 6.2.} \end{aligned}$$

$$(2) \quad i\mathcal{P}^1 = [i-1\mathcal{P}^1, \mathcal{Q}] = [i-1\mathcal{W} + i\mathcal{P}^1, \mathcal{Q}] = [i-1\mathcal{W}, \mathcal{Q}] + [i\mathcal{P}^1, \mathcal{Q}] = i\mathcal{W} + i\mathcal{P}^1.$$

(e) Setzt man  $\dot{\iota} = \eta_{i-1\mathcal{P}^1}$ ,  $\varepsilon = \eta_{i\mathcal{P}^1}$ ,  $\zeta = \eta_{i-1\mathcal{W}}$ ,  $\nu = \eta_{i\mathcal{W}}$ , so sind die Voraussetzungen von Lemma 6.5 erfüllt und es gilt, daß die Identität  $\varepsilon$  von  $\mathcal{Q}$  einen Isomorphismus von  $i-1\mathcal{W}/i\mathcal{W}$  auf  $i-1\mathcal{Q}/i\mathcal{P}^1$  genau dann induziert, wenn  $i-1\mathcal{P}^1 = i\mathcal{P}^1 + i-1\mathcal{W}$  und  $i\mathcal{W} = i\mathcal{P}^1 \cap i-1\mathcal{W}$ .

Da diese beiden Bedingungen aber auch nach einer Vertauschung von  $i\mathcal{P}^1$  und  $i-1\mathcal{W}$  erfüllt sind - ebenso wie die übrigen Voraussetzungen des Lemmas -, induziert die Identität  $\varepsilon$  von  $\mathcal{Q}$  einen Isomorphismus von  $i\mathcal{P}^1/i\mathcal{W}$  auf  $i-1\mathcal{Q}/i-1\mathcal{W}$  genau dann, wenn  $\varepsilon$  einen Isomorphismus von  $i-1\mathcal{W}/i\mathcal{W}$  auf  $i-1\mathcal{Q}/i\mathcal{P}^1$  induziert.

D.h. die rechte Seite von (e) kann damit vertauscht werden.

(1) Setzt man nun  $\dagger = \eta_{i-1\mathcal{W} \cap i\mathcal{Q}}$ ,  $\eta = \eta_{i\mathcal{W}}$ , so sind die Voraussetzungen von Lemma 6.5, (3) erfüllt, wenn  $\eta$  einen Isomorphismus von  $i-1\mathcal{W}/i\mathcal{W}$  auf  $i-1\mathcal{W} \cap i\mathcal{Q}/i\mathcal{W}$  induziert; denn nach (a) indu-

ziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{W}$ .

(2) dieses Lemmas garantiert, daß die Identität  $\varepsilon$  von  $\mathcal{Q}$  einen Isomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{W}/i^{-1}\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{W}$  induziert.

(2) Induziert  $\varepsilon$  einen Isomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{W}/i^{-1}\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{W}$ , so folgt unter Benützung von (a) und Lemma 2.2, daß  $\varepsilon\gamma = \gamma$  einen Isomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{W}/i^{-1}\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{W}$  induziert.

Korollar 9.4: Induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/1\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}/\mathcal{W} + 1\mathcal{Q}$  und ist für ein  $i \geq 1$   $i^{-1}\mathcal{Q} = i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$ ,

so induziert  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{W}/i^{-1}\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{W}$ .

Beweis:  $i^{-1}\mathcal{Q} = i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W}) = i^{-1}\mathcal{W} + i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$  nach Lemma 8.1  
 $= i^{-1}\mathcal{W} + i^{-1}\mathcal{Q}.$

Aus Satz 9.4, (c) folgt die Behauptung.

Bemerkung 9.2: Wegen dieses Korollars kann in Satz 9.4, (d)  $i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$  nicht durch ein kleineres Ideal ersetzt werden.

Korollar 9.5:  $\mathcal{Q}/\mathcal{W} = \gamma(\mathcal{Q}/\mathcal{W})$  genau dann, wenn

- (1)  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/1\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}/1\mathcal{Q} + \mathcal{W}$  induziert,
- (2)  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{W}/1\mathcal{W}$  auf  $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{Q}/1\mathcal{W}$  induziert.

Beweis: (1) Aus Satz 9.4, (c) folgt  $\mathcal{Q} = \mathcal{W} + 1\mathcal{Q}$ .

$\mathcal{Q}/\mathcal{W} = \mathcal{W} + [\mathcal{Q}, \mathcal{W}]/\mathcal{W} = [\mathcal{Q}/\mathcal{W}, \mathcal{Q}/\mathcal{W}] = \gamma(\mathcal{Q}/\mathcal{W})$  nach Lemma 6.1.

(2)  $\mathcal{Q}/\mathcal{W} = [\mathcal{Q}/\mathcal{W}, \mathcal{Q}/\mathcal{W}] = \mathcal{W} + [\mathcal{Q}, \mathcal{Q}]/\mathcal{W}$

$\mathcal{Q} = \mathcal{W} + 1\mathcal{Q} \leq 1\mathcal{Q}$  nach Lemma 6.2.

(1) folgt nun aus Lemma 9.2 und (2) aus Satz 9.4, (c).

Bemerkung 9.3: Aus (1) und (2) von Korollar 9.5 folgt (2'):  $\gamma$  induziert für alle  $i$  einen Homomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{W}/i^{-1}\mathcal{W}$  auf  $i^{-1}\mathcal{W}^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{W}$ . Zum Beweis wende man Satz 9.4, (d) genügend oft an.

Bemerkung 9.4: Ist insbesondere  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{W} = P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$ ,  $\gamma = \varepsilon$ ,

so ist der von  $\varepsilon$  induzierte Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathcal{W}$  auf  $\mathcal{Q}/P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$

der triviale Homomorphismus. Es folgt  $\mathcal{Q} = P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})$  und (8.3) liefert

$\mathcal{Q}/\mathcal{W} = P(\mathcal{Q}, \mathcal{W})/\mathcal{W} = P(\mathcal{Q}/\mathcal{W}) = \gamma(\mathcal{Q}/\mathcal{W})$ . Gelten die übrigen Voraussetzun-

gen von (V), so schließt man aus Korollar 9.5 und Bemerkung 9.3,

daß  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{M}/i^{-1}\mathcal{M}$  auf  $i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \cap i^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$   
für alle  $i$  induziert.  $i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \cap i^{-1}\mathcal{Q}/i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) = i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M})/i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ ,  
denn  $P(\mathcal{Q}, \mathcal{M})/\mathcal{M} = P(\mathcal{Q}/\mathcal{M}) \subseteq 1(\mathcal{Q}/\mathcal{M}) = \mathcal{M} + {}^1\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  nach (3.2) und Lemma 6.1,  
 $P(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M} + {}^1\mathcal{Q} = {}^1\mathcal{Q}$  nach Lemma 6.2 und (V),  
 $i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M}) \cap i^{-1}\mathcal{Q} = i^{-1}P(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$  nach (4.16).

Korollar 9.6:  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/i\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}/i\mathcal{Q} + \mathcal{M}$   
und für ein gewisses  $i$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/i\mathcal{M}$  in  $\mathcal{Q}/i\mathcal{M}$ .

- (a)  $\gamma$  induziert für  $j > i$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/j\mathcal{M}$  in  
 $\mathcal{Q}/j\mathcal{M}$  und einen Isomorphismus von  $j^{-1}\mathcal{M}/j\mathcal{M}$  auf  $j^{-1}\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}/j\mathcal{M}$ .  
(b) Für  $i \neq 0$  sind folgende drei Eigenschaften gleichwertig:

- (1)  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{M}/i\mathcal{M}$  auf  $i^{-1}\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}/i\mathcal{M}$ ,
- (2)  $\gamma$  induziert einen Homomorphismus von  $i^{-1}\mathcal{M}/i\mathcal{M}$  auf  $i^{-1}\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}/i\mathcal{M}$ ,
- (3)  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{M}$  in  $\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{M}$ .

Beweis: (a) Nach Satz 9.4, (b) induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  
 $\mathcal{Q}/j\mathcal{M}$  in  $\mathcal{Q}/j\mathcal{M}$  genau dann, wenn  $j\mathcal{Q} = j\mathcal{M}$ . Für  $j = i$  und damit für  
 $j \geq i$  gilt das nach Voraussetzung.

Nach Satz 9.4, (a) induziert  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $j^{-1}\mathcal{Q}/j\mathcal{Q}$   
auf  $j^{-1}\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}/j\mathcal{M}$ . Wegen  $j^{-1}\mathcal{Q}/j\mathcal{Q} = j^{-1}\mathcal{M}/j\mathcal{M}$  für  $j > i$  folgt daraus  
die Behauptung.

(b) (1) → (2): trivial.

(2) → (3): Aus Satz 9.4, (c) und Satz 9.4, (b) folgt

$i^{-1}\mathcal{Q} = i^{-1}\mathcal{M} + i^{-1}\mathcal{Q} = i^{-1}\mathcal{M} + i^{-1}\mathcal{M} = i^{-1}\mathcal{M}$ . Danach induziert  
 $\gamma$  auch einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{M}$  in  $\mathcal{Q}/i^{-1}\mathcal{M}$ .

(3) → (1): Setzt man  $i' = i^{-1}$  ( $i \neq 0$ ), so ergibt sich für  $j = i' + 1$   
die Behauptung aus (a).

Satz 9.5:  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{Q}/\mathcal{M}$  genau  
dann, wenn (1)  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/i\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}/i\mathcal{Q} + \mathcal{M}$  induziert,  
(2)  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{M}/i\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{M} \cap \mathcal{Q}/i\mathcal{M}$  indu-  
ziert,

(3) es eine ganze Zahl  $n \geq 0$  gibt derart, daß  $\gamma$  einen  
Isomorphismus von  $P(\mathcal{Q}/n\mathcal{M})$  in  $\mathcal{Q}/n\mathcal{M}$  induziert.

Beweis: (I) (1)  $\mathcal{M} = \mathcal{M} \subseteq {}^1\mathcal{Q}$  folgt aus (V), aus Lemma 9.2 daraus (1).

(2) Wegen (1) induziert  $\gamma$  nach Satz 9.4, (a) einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/_1\mathcal{Q}$  auf  $\mathcal{Q}/_1\mathcal{Q}$ ; aus  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$  folgt (2).

(3)  $n = 1$ ;  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $P(\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}) = P(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})/_{\mathcal{Q}}$  in  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}$ .

(II) (a) Aus (1) und (2) folgt nach Satz 9.4, (d) für alle  $i$ , daß einen Homomorphismus von  $i-1^{\mathcal{Q}}/_{i-1}\mathcal{Q}$  auf  $i-1^{\mathcal{Q}}/_{i-1}\mathcal{Q}$  induziert und daß  $i-1^{\mathcal{Q}} \equiv i-1P(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})$ .

(b) Nach Satz 9.4, (b) induziert  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/_{n^{\mathcal{Q}}}$  in  $\mathcal{Q}/_{n^{\mathcal{Q}}}$  mit dem Kern  $n^{\mathcal{Q}}/_{n^{\mathcal{Q}}}$ . Das liefert mit (3)

$$0 = (n^{\mathcal{Q}}/_{n^{\mathcal{Q}}}) \cap P(\mathcal{Q}/_{n^{\mathcal{Q}}}) = (n^{\mathcal{Q}}/_{n^{\mathcal{Q}}}) \cap (n^P(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})/_{n^{\mathcal{Q}}}) \text{ nach Satz 8.1} \\ = n^{\mathcal{Q}} \cap n^P(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})/_{n^{\mathcal{Q}}}.$$

$$n^{\mathcal{Q}} = n^{\mathcal{Q}} \cap n^P(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}) = n^{\mathcal{Q}}, \text{ weil nach (a) } i-1^{\mathcal{Q}} \subseteq i-1P(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}).$$

D.h.  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/_{n^{\mathcal{Q}}}$  in  $\mathcal{Q}/_{n^{\mathcal{Q}}}$ . Es gibt also eine kleinste ganze Zahl  $w \geq 0$  so, daß  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/_{w^{\mathcal{Q}}}$  in  $\mathcal{Q}/_{w^{\mathcal{Q}}}$  induziert.

(c) Angenommen, es wäre  $w > 0$ . Aus (a) folgte, daß  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $w-1^{\mathcal{Q}}/_{w-1}\mathcal{Q}$  auf  $w-1^{\mathcal{Q}}/_{w-1}\mathcal{Q}$  induziert. Für  $i = w$  wären die Voraussetzungen von Korollar 9.6, (b1) erfüllt und nach (3) würde  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/_{w-1^{\mathcal{Q}}}$  in  $\mathcal{Q}/_{w-1^{\mathcal{Q}}}$  induzieren, was einen Widerspruch ergäbe.

Also ist  $w = 0$ ,  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}$  in  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}$ . Da  $\gamma$  nach (V) einen Homomorphismus von  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}$  auf  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}$  induziert, ist die Behauptung bewiesen.

Korollar 9.7:  $\gamma$  induziert einen Isomorphismus von  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}$  auf  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}}$  genau dann, wenn (1)  $\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}} = 1(\mathcal{Q}/_{\mathcal{Q}})$ ,

(2) eine ganze Zahl  $n \geq 0$  existiert so, daß  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $P(\mathcal{Q}/_{n^{\mathcal{Q}}})$  in  $\mathcal{Q}/_{n^{\mathcal{Q}}}$  induziert.

Beweis: Nach Korollar 9.5 kann (1) durch (1) und (2) von Satz 9.5 ersetzt werden.

Bemerkung 9.5: Notwendigkeit von (1) in Satz 9.5.

$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$  sei der freie abelsche Ring, der von den abzählbar vielen kommutativen Erzeugenden  $x_1, x_2, x_3, \dots$  aufgespannt wird.

$$\mu\nu = \mu = \varphi(0) \cdot (0) \leq {}^1\mathfrak{Q}.$$

Nach Satz 2.7, Satz 2.3 und Def.2.8 ist  $\delta$  selbstähnlich.  $\gamma$  sei die Abbildung:  $r = f(x_1) \mapsto f(x_1')$ ,  $x_m \mapsto x_{m-1}$ ,  $m \neq 1$ ,

$$x_1 \mapsto 0.$$

$\gamma$  ist ein Endomorphismus von  $\mathfrak{Q}$  auf sich (aber kein Automorphismus).  $\gamma$  induziert einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/(0)$  auf  $\delta/(0)$ ; dessen Kern sei  $\mu\nu/(0)$ . (V) ist damit erfüllt.

Die linke Seite von Satz 9.5 ist es aber nicht, obwohl

(2)  $\gamma$  einen Homomorphismus von  $\mu\nu/\gamma\mu\nu = (0)$  auf  $(0) \cap {}^1\delta/(0) = (0)$  induziert,

(3)  $\gamma$  einen Isomorphismus von  $P(\mathfrak{Q}/\mu\nu) = P(\mathfrak{Q}/(0)) = P(\mathfrak{Q}) = (0)$  in  $\delta/\mu\nu = \delta/(0) = \delta$  induziert.

Bemerkung 9.6: Notwendigkeit von (3) in Satz 9.5.

$\mathfrak{Q} = \delta$  sei ein nicht kommutativer, einfacher Ring, z.B. ein Schiefkörper.  $\mu\nu = \varphi(0)$ ,  $\mu = \varphi\delta$ ;  $\gamma$  sei die Identität.  $\mathfrak{Q}$  und  $\delta$  sind als wesentlich gleiche Ringe verwandt und  $\delta$  ist selbstähnlich, denn es gibt nur die Darstellungen  $\delta/(0)$  und  $\delta/\delta$ , und diese sind getreu.  $\mu\nu = (0) \leq {}^1\mathfrak{Q}$  und  $\gamma$  induziert einen Homomorphismus von  $\mathfrak{Q}/\mu\nu = \mathfrak{Q}$  auf  $\delta/\mu\nu = (0)$ ; dessen Kern ist  $\mu\nu/\mu\nu = \mu\nu/(0) = \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}$ . (V) ist damit erfüllt.

Aus  ${}^1\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}$  ( ${}^1\mathfrak{Q}$  ist ein Ideal und  ${}^1\mathfrak{Q} \neq (0)$  wegen der Nichtkommutativität von  $\mathfrak{Q}$ ) ergibt sich nach Korollar 9.5, daß die Bedingungen (1) und (2) von Satz 9.5 erfüllt sind.

Die linke Seite von Satz 9.5 ist es aber nicht, denn  $\gamma$  induziert keinen Isomorphismus von  $\mathfrak{Q}/\mu\nu = \mathfrak{Q}$  auf  $\delta/\mu\nu = (0)$ . Ebenso wenig ist (3) erfüllt, weil  $\gamma$  sonst einen Isomorphismus von  $P(\mathfrak{Q}/\mu\nu) = P(\mathfrak{Q}/(0)) = P(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{Q}$  (denn  ${}^1\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}$ ) in  $\delta/\mu\nu = \delta/\mu\nu = \delta/\delta = (0)$  induzieren müßte.

Bemerkung 9.7: (3) von Satz 9.5 ist erfüllt, wenn  $P(\mathfrak{Q}/\mu\nu) = (0)$ , was nach Lemma 8.2 gleichbedeutend ist mit  $P(\mathfrak{Q}/\mu\nu) = (0)$ .

## § 10. Beispiele.

### 10.1. Viererring.

|          |          |          |          |          |          |   |          |         |          |                                        |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|----------|---------|----------|----------------------------------------|
| +        | o        | $\alpha$ | $\beta$  | $\gamma$ | ·        | o | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | Durch diese Tafeln wird nach [II.S.90] |
| o        | o        | $\alpha$ | $\beta$  | $\gamma$ | o        | o | o        | o       | o        | ein nicht kommutativer Ring definiert. |
| $\alpha$ | $\alpha$ | o        | $\gamma$ | $\beta$  | $\alpha$ | o | o        | o       | o        |                                        |
| $\beta$  | $\beta$  | $\gamma$ | o        | x        | $\beta$  | o | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | Es gilt                                |
| $\gamma$ | $\gamma$ | $\beta$  | x        | o        | $\gamma$ | o | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |                                        |

$$(10.1) \quad 1\delta = \{o, \alpha\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$(10.2) \quad [1\delta, 1\delta] = (o). \text{ Siehe (4.28).}$$

$$(10.3) \quad P(\delta) = 1\delta.$$

Beweis:  $1(1\delta) = 2\delta = 1\delta$  nach (10.1) und (4.15).  $P(\delta/1\delta) = (o)$ , denn  $\delta/1\delta$  ist kommutativ. Aus (8.6) folgt nun die Behauptung.

### 10.2. Sechzehnering.

Def. 10.1:  $(s_1, s_2) + (s_3, s_4) = \ast (s_1 + s_3, s_2 + s_4),$

$$(s_1, s_2)(s_3, s_4) = \ast (s_1 s_3 + s_1 s_4, s_2 s_3 + s_2 s_4).$$

Nach [II.S.110, Beispiel 1] ist die Menge  $\mathcal{Q}$  dieser Paare ein Ring, wenn  $s_i$  die Elemente eines Ringes  $\delta$  sind.  $\delta$  sei der Ring aus

§ 10.1. Setzt man  $(o, o) = o \quad (\alpha, o) = 4 \quad (\beta, o) = 8 \quad (\gamma, o) = 12$   
 $(o, \alpha) = 1 \quad (\alpha, \alpha) = 5 \quad (\beta, \alpha) = 9 \quad (\gamma, \alpha) = 13$   
 $(o, \beta) = 2 \quad (\alpha, \beta) = 6 \quad (\beta, \beta) = 10 \quad (\gamma, \beta) = 14$   
 $(o, \gamma) = 3 \quad (\alpha, \gamma) = 7 \quad (\beta, \gamma) = 11 \quad (\gamma, \gamma) = 15,$  so

gilt:

| +  | o  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| o  | o  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1  | 1  | o  | 3  | 2  | 5  | 4  | 7  | 6  | 9  | 8  | 11 | 10 | 13 | 12 | 15 | 14 |
| 2  | 2  | 3  | o  | 1  | 6  | 7  | 4  | 5  | 10 | 11 | 8  | 9  | 14 | 15 | 12 | 13 |
| 3  | 3  | 2  | 1  | o  | 7  | 6  | 5  | 4  | 11 | 10 | 9  | 8  | 15 | 14 | 13 | 12 |
| 4  | 4  | 5  | 6  | 7  | o  | 1  | 2  | 3  | 12 | 13 | 14 | 15 | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 5  | 5  | 4  | 7  | 6  | 1  | o  | 3  | 2  | 13 | 12 | 15 | 14 | 9  | 8  | 11 | 10 |
| 6  | 6  | 7  | 4  | 5  | 2  | 3  | o  | 1  | 14 | 15 | 12 | 13 | 10 | 11 | 8  | 9  |
| 7  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | o  | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9  | 8  |
| 8  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | o  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 9  | 9  | 8  | 11 | 10 | 13 | 12 | 15 | 14 | 1  | o  | 3  | 2  | 5  | 4  | 7  | 6  |
| 10 | 10 | 11 | 8  | 9  | 14 | 15 | 12 | 13 | 2  | 3  | o  | 1  | 6  | 7  | 4  | 5  |
| 11 | 11 | 10 | 9  | 3  | 15 | 14 | 13 | 12 | 3  | 2  | 1  | o  | 7  | 6  | 5  | 4  |
| 12 | 12 | 13 | 14 | 15 | 8  | 9  | 10 | 11 | 4  | 5  | 6  | 7  | o  | 1  | 2  | 3  |
| 13 | 13 | 12 | 15 | 14 | 9  | 8  | 11 | 10 | 5  | 4  | 7  | 6  | 1  | o  | 3  | 2  |
| 14 | 14 | 15 | 12 | 13 | 10 | 11 | 3  | 9  | 6  | 7  | 4  | 5  | 2  | 3  | o  | 1  |
| 15 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | o  |

| .  | 0 | 1 | 2  | 3  | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|---|---|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 2  | 0 | 1 | 2  | 3  | 1 | 0 | 3  | 2  | 2  | 3  | 0  | 1  | 3  | 2  | 1  | 0  |
| 3  | 0 | 1 | 2  | 3  | 1 | 0 | 3  | 2  | 2  | 3  | 0  | 1  | 3  | 2  | 1  | 0  |
| 4  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 5  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 6  | 0 | 1 | 2  | 3  | 1 | 0 | 3  | 2  | 2  | 3  | 0  | 1  | 3  | 2  | 1  | 0  |
| 7  | 0 | 1 | 2  | 3  | 1 | 0 | 3  | 2  | 2  | 3  | 0  | 1  | 3  | 2  | 1  | 0  |
| 8  | 0 | 4 | 8  | 12 | 4 | 0 | 12 | 8  | 8  | 12 | 0  | 4  | 12 | 8  | 4  | 0  |
| 9  | 0 | 4 | 8  | 12 | 4 | 0 | 12 | 8  | 8  | 12 | 0  | 4  | 12 | 8  | 4  | 0  |
| 10 | 0 | 5 | 10 | 15 | 5 | 0 | 15 | 10 | 10 | 15 | 0  | 5  | 15 | 10 | 5  | 0  |
| 11 | 0 | 5 | 10 | 15 | 5 | 0 | 15 | 10 | 10 | 15 | 0  | 5  | 15 | 10 | 5  | 0  |
| 12 | 0 | 4 | 8  | 12 | 4 | 0 | 12 | 8  | 8  | 12 | 0  | 4  | 12 | 8  | 4  | 0  |
| 13 | 0 | 4 | 8  | 12 | 4 | 0 | 12 | 8  | 8  | 12 | 0  | 4  | 12 | 8  | 4  | 0  |
| 14 | 0 | 5 | 10 | 15 | 5 | 0 | 15 | 10 | 10 | 15 | 0  | 5  | 15 | 10 | 5  | 0  |
| 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 5 | 0 | 15 | 10 | 10 | 15 | 0  | 5  | 15 | 10 | 5  | 0  |

(10.4.1)  $i\mathbb{Q} = \{0, 1, 4, 5, 10, 11, 14, 15\}$  ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  .

(10.4.2)  $P(\mathbb{Q}) = i\mathbb{Q}$  . Beweis wie in (10.3).

(10.5)  $[i\mathbb{Q}, i\mathbb{Q}] = \{0, 5\}$  .

(10.6)  ${}_1[i\mathbb{Q}, i\mathbb{Q}] = (0) \neq [i\mathbb{Q}, i\mathbb{Q}]$  , obwohl  $[i\mathbb{Q}, i\mathbb{Q}] \subseteq P(\mathbb{Q})$  .

Siehe Bemerkung 8.1.

(10.7)  ${}_1[i\mathbb{Q}, i\mathbb{Q}] = (0) \neq [i\mathbb{Q}, i\mathbb{Q}] \cap i\mathbb{Q} = [i\mathbb{Q}, i\mathbb{Q}]$  nach (10.6). Siehe (8.8).

### 10.3 Quaternionenring.

Def. 10.2:  $\mathbb{Q}$  sei der Ring der Quaternionen  $(n_1e + n_2a + n_3b + n_4c)$ , genauer: die Algebra über dem Ring der ganzen Zahlen als Operatorenbereich mit den Basiselementen  $e, a, b, c$ , für welche die für Quaternionen übliche Multiplikationstafel gilt.

(10.8)  $i\mathbb{Q} = 2\mathbb{Q}$ .

Beweis: Für die  $i\mathbb{Q}$  erzeugenden Elemente  $[r_1, r_2]$  ( $r_i = (e_i, a_i, b_i, c_i)$ ,  $e_i = n_{1,i}$ ;  $a_i = n_{2,i}$ , etc.) gilt:

$[r_1, r_1] = 2(0, b_1c_2 - c_1b_2, c_1a_2 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2)$ , d.h.  $i\mathbb{Q} \subseteq 2\mathbb{Q}$ .

$(0, 0, 0, 2) = [(0, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0)] \in i\mathbb{Q}$ . Dasselbe folgt analog für  $(0, 0, 2, 0)$  und  $(0, 2, 0, 0)$ .

$(2, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 2)(0, 0, 0, 1) \in i\mathbb{Q}$ .

Da diese vier  $2\mathbb{Q}$  erzeugen, gilt  $2\mathbb{Q} \subseteq i\mathbb{Q}$ .

Def. 10.3:  $i\mathbb{Q}'$  sei der von den Elementen  $[r_1, r_2]$  erzeugte Unterring.

(10.9)  $i\mathbb{Q}' \subset i\mathbb{Q}$ . Siehe § 3.1, Seite 1.

Beweis:  $[r_1, r_2] = 2(o, a', b', c')$ ;  $\sum [r_{1,\nu}, r_{2,\nu}]$  ist von derselben Gestalt.  $\prod [r_{1,\nu}, r_{2,\nu}]$  hat als Teiler mindestens  $4 \cdot (2, o, o, o)$  ist also in  $\mathcal{R}'$  nicht enthalten.

(10.10)  $i\mathcal{R} = (2^i)\mathcal{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

Beweis:  $i = 0$ : trivial.

$$i = 1: (10.8).$$

$$i-1 \rightarrow i: i\mathcal{R} = [i-1\mathcal{R}, \mathcal{R}] = [2^{i-1}\mathcal{R}, \mathcal{R}] = 2^{i-1}[\mathcal{R}, \mathcal{R}] = 2^{i-1}2\mathcal{R} = 2^i\mathcal{R},$$

denn  $[nr_1, r_2] = n[r_1, r_2]$  nach (4.8), wenn  $n$  eine ganze Zahl ist.

(10.11)  $P(\mathcal{R}) = (o)$ .

Beweis: Damit ein Ideal  $\mathcal{W}$  gleich  $P(\mathcal{R})$  ist, muß nach (8.3) gelten

$\gamma\mathcal{W} = \mathcal{W}$ ; aber  $\gamma\mathcal{W} \subseteq 2\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$ , es sei denn  $\mathcal{W} = (o)$ .

#### 10.4. Ring der p-Polynome nach ORE.

[VI.S.559], [II.S.550].

$\tilde{\mathcal{A}}$  sei ein kommutativer, nullteilerfreier Ring der Charakteristik  $p \neq 0$ . Dann ist  $p$  eine Primzahl und auch Charakteristik von  $\tilde{\mathcal{A}}[x]$ .

(Weiter unten wird  $\tilde{\mathcal{A}}$  zu einem Körper spezialisiert.)

Def. 10.4: Ein Polynom  $F_p(x)$  von  $\tilde{\mathcal{A}}[x]$  heißt p-Polynom, wenn

$$F_p(x) = \gamma a_0 x^{(p^m)} + a_1 x^{(p^{m-1})} + \dots + a_{m-1} x^p + a_m x^1,$$

wobei  $a_\nu \in \tilde{\mathcal{A}}$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $m \geq 0$ .

$m = \gamma$  Grad des Polynoms,  $+\infty$  der Grad des Nullpolynoms.

$$G_p(x) = b_0 x^{(p^n)} + b_1 x^{(p^{n-1})} + \dots + b_{n-1} x^p + b_n x^1.$$

Def. 10.5:  $F_p(x) \cdot G_p(x) = \gamma F_p(G_p(x))$ ;

die Summe zweier p-Polynome sei wie üblich definiert.

(10.12) Die p-Polynome bilden einen im allgemeinen nicht kommutativen Ring; er heiße  $\mathcal{R}$ .

Beweis: (1) Hinsichtlich der Addition bilden sie einen Modul.

(2) In einem kommutativen Ring der Charakteristik  $p$  gilt

$$(\sum \gamma A_\gamma)^p = \sum \gamma A_\gamma^p.$$

$$\begin{aligned}
F_p(x)G_p(x) &= a_0G_p(x)^{(p^m)} + \dots + a_{m-1}G_p(x)^p + a_mG_p(x) \\
&= a_0[b_0^{(p^m)}x^{(p^{n+m})} + \dots + b_n^{(p^m)}x^{(p^m)}] + \\
&\quad + a_1[b_0^{(p^{m-1})}x^{(p^{n+m-1})} + \dots + b_n^{(p^{m-1})}x^{(p^{m-1})}] + \\
&\quad + \dots \\
&\quad + a_{m-1}[b_0^px^{(p^{n+1})} + b_1^px^{(p^n)} + \dots + b_n^px^p] + \\
&\quad + a_mG_p(x) \\
&= c_0x^{(p^{n+m})} + c_1x^{(p^{n+m-1})} + \dots + c_{n+m-1}x^p + c_{n+m}x^1,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0^{(p^m)} \\
c_1 &= a_0b_1^{(p^m)} + a_1b_0^{(p^{m-1})} \\
c_2 &= a_0b_2^{(p^m)} + a_1b_1^{(p^{m-1})} + a_2b_0^{(p^{m-2})} \\
&\dots
\end{aligned}$$

$$c_{n+m-2} = a_{m-2}b_n^{(p^2)} + a_{m-1}b_{n-1}^{(p^1)} + a_mb_{n-2}$$

$$c_{n+m-1} = a_{m-1}b_n^p + a_mb_{n-1}$$

$$c_{n+m} = a_mb_n.$$

$F_p(x)G_p(x)$  ist also ebenfalls ein  $p$ -Polynom.

(3) Nach [I. §146] ist  $\mathcal{Q}$  assoziativ und beiderseitig distributiv.

(4)  $\mathcal{Q}$  ist im allgemeinen nicht kommutativ, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel:  $\mathcal{Q}$  sei der Ring der ganzen Zahlen;  $p = 3$ .

$\mathcal{Q} = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(3) = \{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}$ ;  $\mathcal{Q}$  ist ein Körper.

$$F_p(x) = 2x^3, \quad G_p(x) = ix^1.$$

$$F_p(x)G_p(x) = 2x^3ix^1 = 2i^3x^3 = ix^3,$$

$$G_p(x)F_p(x) = ix^12x^3 = 2ix^3 \neq ix^3.$$

(10.13)  ${}^1\mathcal{Q}$  enthält nur Polynome ohne Glieder vom Grade Null.

Beweis:  ${}^1\mathcal{Q}$  wird erzeugt von den Elementen  $[F_p(x), G_p(x)]$ . Nach Anwendung von (4.8) auf  $F_p(x)$  und  $G_p(x)$  bemerkt man, daß die Kommutatoren  $A_{ij} = [a_ix^{(p^{m-i})}, b_jx^{(p^{n-j})}] = (a_ib_j^{(p^{m-i})} - a_i^{(p^{n-j})}b_j)x^{(p^{m+n-i-j})}$  nur dann vom Grade Null sind, wenn  $i = m$  und  $j = n$ . Dann ist aber  $A_{mn} = (a_mb_n - a_nb_n)x^1 = 0$ .

Ist  $F_p(x)$  ein Polynom mit  $a_m = 0$ , so sind  $F_p(x)G_p(x)$  und  $G_p(x)F_p(x)$  Polynome derselben Art, denn  $c_{n+m} = a_mb_n = 0$ .

Im obigen Beispiel enthält  ${}^1\mathcal{Q}$  genau die Polynome  $F_p(x)$  mit  $a_m = 0$ , denn  $2ix^1[ix^1, 2x^3] = 2ix^1ix^3 = x^3$ .

Der folgende Teil dieses Paragraphen bezieht sich ganz auf dieses Beispiel.

$$(10.14) \quad {}^1\mathcal{R} = {}^1\mathcal{R} \text{ für } i \geq 1.$$

Beweis:  ${}^1\mathcal{R} = {}^2\mathcal{R}$ , denn  $x^3 = 2ix^1[ix^1, 2x^3] \in {}^2\mathcal{R}$ .

$$(10.15) \quad \mathcal{P}(\mathcal{R}) = {}^1\mathcal{R}.$$

Der Beweis ist identisch mit dem Beweis von (10.3).

$$(10.16) \quad {}^1\mathcal{R}{}^1\mathcal{R} \text{ ist ein Ideal von Polynomen } \mathbb{F}_p(x) \text{ mit } a_{m-1} = a_m = 0.$$

Beweis: Nach (2) von (10.12) ist  $c_{n+m-1} = 0$ , wenn  $a_m = b_n = 0$  oder, wenn  $a_{m-1} = a_m = 0$ .

$$(10.17) \quad [{}^1\mathcal{R}, {}^1\mathcal{R}] \text{ ist das Ideal der Polynome } \mathbb{F}_p(x) \text{ mit } a_{m-1} = a_m = 0.$$

Beweis: (1)  $[{}^1\mathcal{R}, {}^1\mathcal{R}] \subseteq {}^1\mathcal{R}{}^1\mathcal{R}$ .

$$(2) [x^3, ix^3] = ix^{(3^2)}. \text{ Da } \mathcal{R} \text{ ein Körper ist, lassen sich alle übrigen}$$

Polynome daraus erzeugen.

$$(10.18) \quad {}^1\mathcal{R}[\mathcal{R}, \mathcal{R}] \subseteq [{}^1\mathcal{R}, \mathcal{R}]\mathcal{R} + [\mathcal{R}, {}^1\mathcal{R}]\mathcal{R}. \text{ Siehe (4.11.4).}$$

Beweis:  ${}^1\mathcal{R}\mathcal{R} = {}^1\mathcal{R}$ , denn  $x^3 = x^3x^1 \in {}^1\mathcal{R}\mathcal{R}$ .

$$[{}^1\mathcal{R}, \mathcal{R}]\mathcal{R} + [\mathcal{R}, {}^1\mathcal{R}]\mathcal{R} = {}^2\mathcal{R}\mathcal{R} + [\mathcal{R}, {}^1\mathcal{R}] = {}^1\mathcal{R}\mathcal{R} + {}^2\mathcal{R} = {}^1\mathcal{R} \text{ nach (10.14).}$$

Aus (10.16) folgt nun die Behauptung.

Literaturverzeichnis.

- I. R.BAER, Representations of groups as quotient groups.I.,II.,III.  
Transactions Amer.Math.Soc. 58, 295 - 419 (1945).
- II. L.RÉDEI, Algebra I, Leipzig, Akad.Verl.Ges. 1959.
- III. W.SPECHT, Gruppentheorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag 1956.
- IV. S.A.JENNINGS, Central chains of ideals in an associative ring.  
Duke Math.J. 2, 341 - 355 (1944).
- V. R.BAER, The homomorphism theorems for loops.  
Amer.J.of Math. 67, 450 - 460 (1945).
- VI. O.ORE, On a special class of polynomials.  
Transactions Amer.Math.Soc. 35, 559 - 584 (1933).

### Lebenslauf.

Am 15.6.1936 wurde ich, Walter Höger, Sohn des Tierarztes Anton Höger, in Höflein a. d. Thaya, Kreis Znaim (CSR), geboren; ich gehöre der römisch katholischen Kirche an.

Nach der Ausweisung im Jahre 1945 kam unsere Familie über Österreich 1946 nach Fürth in Bayern. An der dortigen Oberrealschule bestand ich 1954 das Abitur.

Anschließend studierte ich acht Semester Mathematik und Physik an der Universität in Erlangen. Im Herbst 1958 schloß ich das Studium ab mit der Wissenschaftlichen Prüfung in diesen Fächern für das Lehramt an den Höheren Schulen in Bayern.

Vom 1.1.1959 bis 31.5.1960 war ich Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik an der TH in Braunschweig.



